TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Keyl
M. Kech

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2) MA9203

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2016S

Sommersem. 2016
Probeklausur
(4.7.2016)

1. **Krümmung einer Klothoide** **(8 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(u^2/2)\,\mathrm{d}u \\ \int_0^t \sin(u^2/2)\,\mathrm{d}u \end{pmatrix}$$

an der Stelle $t > 0$ gleich ihrer Länge $L(t)$ ist.

Hinweis: Die Krümmungsformel lautet $\kappa = |(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}|$, wobei $\vec{r} = \binom{x}{y}$.
Lösung:

Sei $t > 0$. Wir berechnen zuerst die Krümmung mit der Formel aus dem Hinweis. **[2]**

$$\dot{x}(t) = \cos(t^2/2), \quad \ddot{x}(t) = -t\sin(t^2/2), \quad \dot{y}(t) = \sin(t^2/2), \quad \ddot{y}(t) = t\cos(t^2/2)$$

Einsetzen ergibt nun $$\kappa(t) = \left| \frac{t\cos^2(t^2/2) + t\sin^2(t^2/2)}{(\cos^2(t^2/2) + \sin^2(t^2/2))^{3/2}} \right| = t.$$ **[3]**

Die Länge ergibt $$L(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(u)|\,\mathrm{d}u = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2}\,\mathrm{d}u = t = \kappa(t).$$ **[3]**

2. **Extrema mit Nebenbedingungen** **(10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die Kandidaten für Extremalstellen von $f(x,y) = \ln(x^4y^5)$ für $x, y > 0$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 1$. [Ergebnis: $(x_0, y_0) = (\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{6})$]

(b) Bei (x_0, y_0) besitzt f unter obiger Nebenbedingung **(2)**

☐ ein lokales Minimum, ☐ einen Sattelpunkt, ☒ ein lokales Maximum.

LÖSUNG:

(a) Die Nebenbedingung kann geschrieben werden als $g(x,y) = 0$ mit $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1$. **(1)**
Es gilt $\operatorname{grad} g(x,y) = \binom{2x}{8y} \neq 0$ für $x, y > 0$. Insbesondere ist $\operatorname{grad} g(x,y) \neq 0$ falls $g(x,y) = 0$, $x, y > 0$. **(1)**
Für einen Extremwert x von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ gilt **(1)**

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4}{x} \\ \frac{5}{y} \end{pmatrix}$ für $x, y > 0$, **(1)**
ist dass gleichbedeutend mit

$$\frac{4}{x} = 2\lambda x, \qquad \frac{5}{y} = 8\lambda y.$$

also $x^2 = \frac{2}{\lambda}$, $y^2 = \frac{5}{8\lambda}$. **(1)**
Eingesetzt in die Nebenbedingung ergibt sich $\frac{2}{\lambda} + \frac{5}{2\lambda} = 1$, **(1)**
bzw. $\lambda = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$. **(1)**
Wegen $x, y > 0$ **(1)**
ist der Punkt $(x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{6})$ der einzige Kandidat für eine Extremstelle.

(b) Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = -\infty$ und $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = -\infty$. Zum Beispiel parametrisiert durch $x \in]0,1[$ ist f entlang der Nebenbedingung eine Funktion die an den offenen Rändern beliebig klein wird. Da es im Inneren nur einen Kandidaten für einen Extremwert gibt muss dies (sogar) ein (absolutes) Maximum sein.

3. **Inverse Funktionen** **(6 Punkte)**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^3 + 2xy + y^2, x^2 + y)$. Zeigen Sie, dass f in einer Umgebung von $(1,1)$ invertierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung der lokalen Umkehrfunktion im Punkt $f(1,1)$.
LÖSUNG:

Die Funktion ist stetig differenzierbar, [1]
für die Ableitung $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y & 2x + 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$ [1]
gilt im Punkt $(1,1)$, dass $Df(1,1) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. [1]
Diese Matrix ist wegen $\det \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$ invertierbar. [1]
Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist f in $(1,1)$ lokal invertierbar, mit [1]

$Df^{-1}(f(1,1)) = Df(1,1)^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. [1]

4. **Tangentialraum** **(4 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot x$. Dann ist der Graph $G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^4$ eine 3-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$. Geben Sie möglichst explizit eine Basis von T_pG_f an, wobei $p \in G_f$.

LÖSUNG:

$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\Phi(x) = (x, f(x))$ ist eine Parametrisierung von G_f. **[1]**

Zu jedem $p \in G_f$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}^3$ mit $p = \Phi(x)$. **[1]**

Da $D\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$ vollen Rang hat, ist T_pG_f dreidimensional mit **[2]**

$$T_pG_f \quad = \quad \operatorname{span}(\partial_1\Phi(x), \partial_2\Phi(x), \partial_3\Phi(x)) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2x_3 \end{pmatrix})$$

5. **Differenzierbarkeit** **(8 Punkte)**

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(a) Für den Punkt $a = (0,0)$ und den Vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ berechne man **[2]**

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = v_1^2 v_2}$$

und **[2]**

$$\boxed{\partial_x f(a) = 0} \qquad \boxed{\partial_y f(a) = 0}$$

(b) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist. **[4]**

Lösung:

(a) Die Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung v ist

$$\partial_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{t^3 v_1^2 v_2}{tt^2(v_1^2 + v_2^2)} - 0 \right) = f(v) = v_1^2 v_2,$$

da $|v| = 1$ **[2 Punkte]**

Wegen $f(x,0) = 0$ ist $\partial_x f(0,0) = 0$ und wegen $f(0,y) = 0$ ist $\partial_y f(0,0) = 0$ **[2 Punkte]**

□

(b) Beh f ist im Ursprung nicht total differenzierbar.

Bew Gemäss Definition aus der Vorlesung ist f total differenzierbar im Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, falls eine lineare Abbildung $A \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ existiert, so dass

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f((x_0,y_0) + (h_1,h_2)) - f(x_0,y_0) - A(h_1,h_2)}{|(h_1,h_2)|} = 0.$$

[1 Punkt]

Außerdem ist die Matrix A eindeutig bestimmt und gleich der Jacobi-Matrix $Df(x_0,y_0)$ an der Stelle (x_0,y_0). **[1 Punkt]**

Nach Aufgabenteil (a) gilt im Ursprung $(x_0,y_0) = (0,0)$, dass $Df(0,0) = (\partial_x f(0,0), \partial_y f(0,0)) = (0,0)$. Wählen wir nun $(h_1,h_2) = (h,h) \neq 0$, so lautet obiger Differenzenquotient im Ursprung

$$\frac{f(h,h) - f(0,0) - Df(0,0)(h,h)}{|(h,h)|} = 2^{-3/2} \frac{h}{|h|}.$$

Daraus folgt, dass der Differenzenquotient im Limes $h \to 0$ gegen $\pm 2^{-3/2}$ und nicht gegen 0 strebt, was im Widerspruch steht zur Definition der totalen Differenzierbarkeit. **[2 Punkte]**

6. **Extrema** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(u, v) := u^3 + v^3 + u^2 + v^2,$$

und die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$,

$$x_1 = (0, 0), \quad x_2 = (0, 2/3), \quad x_3 = (-2/3, 0), \quad x_4 = (-1, 0), \quad x_5 = (-2/3, -2/3).$$

Welche Aussagen sind richtig?

(a) f besitzt einen kritischen Punkt in **[2]**

☒ x_1 ☐ x_2 ☒ x_3 ☐ x_4 ☒ x_5

(b) f besitzt eine lokales Maximum in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☒ x_5

(c) f besitzt eine lokales Minimum in **[2]**

☒ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(d) f besitzt einen Sattelpunkt in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☒ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

LÖSUNG:

(a) Beh x_1, x_3 und x_5 sind kritische Punkte von f.

Bew Um die kritischen Punkte zu bestimmen, berechnen wir die Nullstellen des Gradienten von f,

$$\nabla f(u, v) = (u(3u + 2), v(3v + 2)) = (0, 0),$$

woraus folgt, dass x_1, x_3 und x_5 kritische Punkte sind. x_2 und x_4 sind keine kritischen Punkte. $\square$

(b) Beh f besitzt in x_5 ein lokales Maximum.

Bew Wir berechnen die Hesse-Matrix,

$$H_f(u, v) = \begin{pmatrix} 6u + 2 & 0 \\ 0 & 6v + 2 \end{pmatrix}.$$

An den kritischen Punkten x_1, x_3 und x_5 erhalten wir,

$$H_f(x_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(x_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(x_5) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$H_f(x_1)$ hat den doppelten Eigenwert $2 > 0$, $H_f(x_3)$ die Eigenwerte $-2 < 0$ und $2 > 0$ und $H_f(x_5)$ den doppelten Eigenwert $-2 < 0$. Also hat f in x_5 ein lokales Maximum.

(c) Beh f besitzt in x_1 ein lokales Minimum.

Bew $H_f(x_1)$ hat den doppelten Eigenwerte $2 > 0$.

(d) Beh f besitzt in x_3 einen Sattelpunkt.

Bew $H_f(x_3)$ die Eigenwerte $-2 < 0$ und $2 > 0$.

7. **Koordinatentransformation** **(8 Punkte)**

Gegeben seien die Halbebenen $U = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \xi_2 > 0\}$ und $V = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 > 0\}$ und die Koordinatentransformation $\Phi : U \to V$,

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 \\ \xi_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Wie lautet die Umkehrtransformation $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) : V \to U$?

☒ $\Psi_1(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_2}}$ ☐ $\Psi_2(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2}{\sqrt{x_2}}$ ☒ $\Psi_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_2}$

☐ $\Psi_1(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$ ☐ $\Psi_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$ ☐ $\Psi_1(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2}{\sqrt{x_2}}$

(b) Wie lautet die erste Komponente ∂_{x_1} des Gradienten in den ξ-Koordinaten?

☒ $\partial_{x_1} = \dfrac{1}{\xi_2}\,\partial_{\xi_1}$ ☐ $\partial_{x_1} = \dfrac{1}{\xi_2^2}\,\partial_{\xi_2}$ ☐ $\partial_{x_1} = \dfrac{1}{\xi_2}\,\partial_{\xi_1} + \dfrac{1}{2\xi_2}\,\partial_{\xi_2}$

(c) Wie lautet die zweite Komponente ∂_{x_2} des Gradienten in den ξ-Koordinaten?

☐ $\partial_{x_2} = \dfrac{\xi_1}{2\xi_2^2}\,\partial_{\xi_1} + \dfrac{1}{2\xi_2}\,\partial_{\xi_2}$ ☐ $\partial_{x_2} = -\dfrac{\xi_1}{2\xi_2^2}\,\partial_{\xi_2}$ ☒ $\partial_{x_2} = -\dfrac{\xi_1}{2\xi_2^2}\,\partial_{\xi_1} + \dfrac{1}{2\xi_2}\,\partial_{\xi_2}$

LÖSUNG:

LÖSUNG

(a) <u>Beh</u> $\Psi_1(x_1, x_2) = x_1/\sqrt{x_2}$ und $\Psi_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_2}$

<u>Bew</u> Wir lösen die Gleichungen $\xi_1\xi_2 = x_1$ und $\xi_2^2 = x_2$ nach ξ_1 und ξ_2 auf und erhalten die Behauptung. **[1 Punkt]**

☐

(b) <u>Beh</u> $\partial_{x_1} = \dfrac{1}{\xi_2}\,\partial_{\xi_1}$

<u>Bew</u> Sei $\tilde{f}(x) = f(\Psi(x))$. Dann folgt aus der Kettenregel $(D\tilde{f})(x)^T = (D\Psi)(\Phi(\xi))^T (Df)(\xi)^T$. **[1 Punkt]**

Wir berechnen also

$$(D\Psi)(\Phi(\xi))^T = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}\Psi_1(x) & \partial_{x_1}\Psi_2(x) \\ \partial_{x_2}\Psi_1(x) & \partial_{x_2}\Psi_2(x) \end{bmatrix}\Bigg|_{x=\Phi(\xi)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_2}} & 0 \\ -\frac{x_1}{2\sqrt{x_2^3}} & \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \end{bmatrix}\Bigg|_{x=\Phi(\xi)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\xi_2} & 0 \\ -\frac{\xi_1}{2\xi_2^2} & \frac{1}{2\xi_2} \end{bmatrix}.$$

[1 Punkt]

☐

(c) <u>Beh</u> $\partial_{x_2} = -\dfrac{\xi_1}{2\xi_2^2}\,\partial_{\xi_1} + \dfrac{1}{2\xi_2}\partial_{\xi_2}$

<u>Bew</u> Siehe Aufgabenteil (b). **[1 Punkt]**

☐

8. **Taylorpolynom** **(8 Punkte)**

Geben Sie das Taylorpolynom 5. Ordnung von $f(x, y) = \frac{\sin(y)}{\sqrt{1+x^2y^2}}$ um $(0, 0)$ an.

$$T_5 f((x, y); (0, 0)) = y - \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{1}{120}y^5 - \tfrac{1}{2}x^2y^3$$

LÖSUNG:

$f(x, y) = (y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 \mp \cdots)(1 - \frac{1}{2}x^2y^2 \pm \cdots) = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 - \frac{1}{2}x^2y^3 + \cdots$

[1],**[2]**,**[2]**,**[2]** für die richtigen Terme und **[1]** falls keine zusätzlichen Terme angegeben sind.