TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. KEYL
M. KECH

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2) MA9203

Sommersem. 2016
Probeklausur
(4.7.2016)

`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2016S`

1. **Krümmung einer Klothoide** **(8 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(u^2/2)\,\mathrm{d}u \\ \int_0^t \sin(u^2/2)\,\mathrm{d}u \end{pmatrix}$$

an der Stelle $t > 0$ gleich ihrer Länge $L(t)$ ist.

HINWEIS: Die Krümmungsformel lautet $\kappa = |(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}|$, wobei $\vec{r} = \binom{x}{y}$.

2. **Extrema mit Nebenbedingungen** **(10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die Kandidaten für Extremalstellen von $f(x,y) = \ln(x^4y^5)$ für $x, y > 0$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 1$. [Ergebnis: $(x_0, y_0) = (\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{6})$]

(b) Bei (x_0, y_0) besitzt f unter obiger Nebenbedingung

☐ ein lokales Minimum, ☐ einen Sattelpunkt, ☐ ein lokales Maximum.

3. **Inverse Funktionen** **(6 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^3 + 2xy + y^2, x^2 + y)$. Zeigen Sie, dass f in einer Umgebung von $(1,1)$ invertierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung der lokalen Umkehrfunktion im Punkt $f(1,1)$.

4. **Tangentialraum** **(4 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot x$. Dann ist der Graph $G_f := \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^4$ eine 3-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$. Geben Sie möglichst explizit eine Basis von T_pG_f an, wobei $p \in G_f$.

5. **Differenzierbarkeit** **(8 Punkte)**

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(a) Für den Punkt $a = (0,0)$ und den Vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ berechne man **[2]**

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} =$$

und **[2]**

$\partial_x f(a) =$ $\quad$ $\partial_y f(a) =$

(b) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist. **[4]**

6. **Extrema** **(8 Punkte)**
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(u, v) := u^3 + v^3 + u^2 + v^2,$$

und die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$,

$$x_1 = (0, 0), \quad x_2 = (0, 2/3), \quad x_3 = (-2/3, 0), \quad x_4 = (-1, 0), \quad x_5 = (-2/3, -2/3).$$

Welche Aussagen sind richtig?

(a) f besitzt einen kritischen Punkt in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(b) f besitzt eine lokales Maximum in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(c) f besitzt eine lokales Minimum in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(d) f besitzt einen Sattelpunkt in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

7. **Koordinatentransformation** **(8 Punkte)**
Gegeben seien die Halbebenen $U = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \xi_2 > 0\}$ und $V = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 > 0\}$ und die Koordinatentransformation $\Phi : U \to V$,

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_1\xi_2 \\ \xi_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Wie lautet die Umkehrtransformation $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) : V \to U$?

☐ $\Psi_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\sqrt{x_2}}$ ☐ $\Psi_2(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{\sqrt{x_2}}$ ☐ $\Psi_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_2}$

☐ $\Psi_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$ ☐ $\Psi_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$ ☐ $\Psi_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{\sqrt{x_2}}$

(b) Wie lautet die erste Komponente ∂_{x_1} des Gradienten in den ξ-Koordinaten?

☐ $\partial_{x_1} = \frac{1}{\xi_2}\,\partial_{\xi_1}$ ☐ $\partial_{x_1} = \frac{1}{\xi_2^2}\,\partial_{\xi_2}$ ☐ $\partial_{x_1} = \frac{1}{\xi_2}\,\partial_{\xi_1} + \frac{1}{2\xi_2}\,\partial_{\xi_2}$

(c) Wie lautet die zweite Komponente ∂_{x_2} des Gradienten in den ξ-Koordinaten?

☐ $\partial_{x_2} = \frac{\xi_1}{2\xi_2^2}\,\partial_{\xi_1} + \frac{1}{2\xi_2}\,\partial_{\xi_2}$ ☐ $\partial_{x_2} = -\frac{\xi_1}{2\xi_2^2}\,\partial_{\xi_2}$ ☐ $\partial_{x_2} = -\frac{\xi_1}{2\xi_2^2}\,\partial_{\xi_1} + \frac{1}{2\xi_2}\,\partial_{\xi_2}$

8. **Taylorpolynom** **(8 Punkte)**
Geben Sie das Taylorpolynom 5. Ordnung von $f(x, y) = \frac{\sin(y)}{\sqrt{1+x^2y^2}}$ um $(0, 0)$ an.

$T_5 f((x, y); (0, 0)) =$