....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I .... Erstkorrektur

II .... Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik 3 für Physiker
(Analysis 2)

Prof. Dr. M. Keyl

29. Juli 2016, 11:00 – 12:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **64 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Kurvenintegral** **(6 Punkte)**

Gegeben Sei die Kurve γ von $(0,0)$ nach $(1,0)$ die sich aus der Teilkurve $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t)$ und der Strecke γ_2 von $(1,1)$ nach $(1,0)$ zusammensetzt (d.h. wir durchlaufen erst γ_1 von $(0,0)$ nach $(1,1)$ und dann γ_2 von $(1,1)$ nach $(1,0)$). Berechnen sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma X(y) \cdot dy \quad \text{mit} \quad X(x) = (2x_1x_2 - x_1^2, x_1 + x_2^2)$$

LÖSUNG:

Mit $\gamma_1(t) = (t^2, t)$ und $\gamma_2(t) = (1, 1-t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma X(y) \cdot dy &= \int_{\gamma_1} X(y) \cdot dy + \int_{\gamma_2} X(y) \cdot dy \qquad [\mathbf{1}] \\
&= \int_0^1 \langle X(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t)\rangle dt + \int_0^1 \langle X(\gamma_2(t)), \gamma_2'(t)\rangle dt \qquad [\mathbf{1}] \\
&= \int_0^1 \langle (2t^3 - t^4, 2t^2), (2t, 1)\rangle dt + \int_0^1 \langle (2(1-t) - 1, 1 + (1-t)^2), (0, -1)\rangle dt \qquad [\mathbf{2}] \\
&= \int_0^1 4t^4 - 2t^5 + 2t^2 - 1 - (1-t)^2 dt = \int_0^1 -2t^5 + 4t^4 + t^2 + 2t - 2dt \qquad [\mathbf{1}] \\
&= \left[-\frac{1}{3}t^6 + \frac{4}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 2t \right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} + 1 - 2 = -\frac{1}{5} \qquad [\mathbf{1}]
\end{aligned}$$

2. **Differenzierbarkeit** **(12 Punkte)**

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x_1^3 - 3x_1x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \text{ für } x \neq 0 \quad \text{und} \quad f(0) = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass in Polarkoordinaten $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$ gilt: **[3]**

$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = r\cos(3\varphi)$$

Hinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis) die trigonometrische Formel $\cos(3\varphi) = 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)$

(b) Folgern Sie aus (a) dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $|f(x)| \leq \|x\|$. Warum folgt daraus, dass f in 0 stetig ist? **[3]**

(c) Beweisen Sie ferner, dass die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(0)$ und $\partial_2 f(0)$ existieren, und geben Sie deren Wert an. **[3]**

(d) Betrachten Sie zusätzlich die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t)$ und zeigen Sie dass die Gleichung

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

für $t = 0$ nicht gilt. **[3]**

Lösung:

(a) Es ist $\tilde{f}(r, \varphi) = r\big(\cos(\varphi)^3 - 3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)\big)$ und außerdem wie im Hinweis angegeben:

$$\cos(3\varphi) = 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi) = \cos^3(\varphi) + 3(\cos^3(\varphi) - \cos(\varphi))$$

Ferner ist $\cos^2(\varphi) - 1 = -\sin^2(\varphi)$ also

$$\cos^3(\varphi) - \cos(\varphi) = \cos(\varphi)(\cos^2(\varphi) - 1) = -\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)\,.$$

Zusammen also $\tilde{f}(r, \varphi) = r\cos(3\varphi)$ wie behauptet.

(b) Für $x \neq 0$ gibt es $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$ mit $x = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Also

$$|f(x)| = |r\cos(3\varphi)| \leq |r| = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|x\|$$

Für $x = 0$ gilt ebenfalls $|f(0)| = 0 = \|0\|$. Für den Beweis der Stetigkeit wählen wir ein beliebiges $\epsilon > 0$ und erhalten für $\|x\| < \epsilon$:

$$|f(0) - f(x)| = |f(x)| \leq \|x\| < \epsilon$$

also ist f in 0 stetig.

(c) Die partiellen Ableitungen bei 0 berechnen sich zu:

$$\partial_1 f(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 - 0}{h^2 h} = 1$$
$$\partial_2 f(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h^2 h} = 0$$

(d) Offenbar ist $\nabla f(0) = (1, 0)$; daher:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} \frac{t^3 - 3t^3}{2t^2} = -1 \neq 1 = \langle (1,0), (1,1) \rangle = \langle \nabla f(0), \gamma'(0) \rangle$$

3. **Taylorentwicklung** **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung bis zur 6-ten Ordnung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)},$$

mit dem Ursprung als Entwicklungspunkt.

$$T_6 f((x, y); (0, 0)) = 1 - x^2 - y^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4 + x^2y^2 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{6}y^6 - \frac{1}{2}x^2y^4 - \frac{1}{2}x^4y^2$$

LÖSUNG:

$e^z = 1 + z + z^2/2 + z^3/6 + ...$ mit $z = -x^2 - y^2$ folgt

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{6}(x^2 + y^2)^3 + ...$$

[1] für die 0. Ordnung, je **[2]** für die 2. und 4. und 6. Ordnung, **[1]** wenn keine weiteren Terme angegeben sind.

4. **Extrema** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (x-6)^2 + (x+2)y^2 + 10,$$

und die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$,

$$x_1 = (2, 4), \quad x_2 = (-2, 4), \quad x_3 = (6, 2), \quad x_4 = (-2, -4), \quad x_5 = (6, 0).$$

Welche Aussagen sind richtig?

(a) f besitzt einen kritischen Punkt in **[2]**

☐ x_1 ☒ x_2 ☐ x_3 ☒ x_4 ☒ x_5 ☐ nirgendwo

(b) f besitzt eine lokales Minimum in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☒ x_5 ☐ nirgendwo

(c) f besitzt eine lokales Maximum in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5 ☒ nirgendwo

(d) f besitzt einen Sattelpunkt in **[2]**

☐ x_1 ☒ x_2 ☐ x_3 ☒ x_4 ☐ x_5 ☐ nirgendwo

Hinweis: Für eine 2×2 Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt: $\det A < 0 \Leftrightarrow A$ nicht singulär und indefinit (= einen strikt positiven und einen strikt negativen Eigwert).

LÖSUNG:

(a) Beh x_2, x_4 und x_5 sind kritische Punkte von f.

Bew Um die kritischen Punkte zu bestimmen, berechnen wir die Nullstellen des Gradienten von f,

$$\nabla f(x, y) = (2(x-6) + y^2, 2(x+2)y) = (0, 0).$$

Die zweite Gleichung liefert $x = -2$ oder $y = 0$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt die drei angegeben kritischen Punkte.

☐

(b) Beh f besitzt in x_5 ein lokales Minimum und in x_2, x_4 Sattelpunkte.

Bew Wir berechnen die Hesse-Matrix,

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2(x+2) \end{pmatrix}.$$

An den kritischen Punkten x_2, x_4 und x_5 erhalten wir,

$$H_f(x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(x_4) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(x_5) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

wegen $\det H_f(x_2) = \det H_f(x_4) = -64$ sind x_2, x_4 Sattelpunkte. Dagegen hat $H_f(x_5)$ die Eigenwerte 2 und 16, ist also positiv definit, weshalb in x_5 ein lokales Minimum vorliegt. ☐

5. **Implizite Funktionen** **(8 Punkte)**

Betrachten Sie die Funktion: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 10x^2 + 12xy + 10y^2 + 8x + 24y$$

und den Punkt $(x_0, y_0) = (0, -12/5)$.

(a) Zeigen Sie, dass offene Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}$ von x_0, y_0 und eine eindeutige Funktion $y \in \mathrm{C}^\infty(U, V)$ existieren, so dass

$$f(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in U$$

gilt. **[3]**

(b) Bestimmen Sie die Ableitung $y'(0)$ in Punkt 0. **[3]**

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ an die Höhenlinie $N_f(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ im Punkt (x_0, y_0). **[1]**

(d) Geben Sie eine Approximation für $y(0.1)$ an. **[1]**

Lösung:

(a) Die Abbildung ist glatt und es gilt: $\partial_2 f(x,y) = 12x + 20y + 24$. Also ist $\partial_2 f(x_0, y_0) = -24$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren daher offene Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}$ von x_0, y_0 und eine Abbildung $y \in C^\infty(U, V)$ mit $f(x, y(x)) = 0 \ \forall x \in U$.

(b) Es ist

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = \partial_1 f(x, y(x)) + \partial_2 f(x, y(x)) y'(x)$$

Also für $\partial_2 f(x, y(x)) \neq 0$:

$$y'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, y(x))}{\partial_2 f(x, y(x))}$$

Da $y(x_0) = y_0$ und $\partial_2 f(x_0, y_0) \neq 0$ können wir diese Gleichung anwenden und erhalten:

$$y'(x_0) = -\frac{20x_0 + 12y_0 + 8}{12x_0 + 20y_0 + 24} = -\frac{13}{15}$$

(c) Es handelt sich um das Taylorpolynom bis zum linearen Glied:

$$T(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = -\frac{12}{5} - \frac{13}{15}x$$

(d) Wir werten $T(0.1)$ aus:

$$T(0.1) = -\frac{12}{5} - \frac{13}{15}\frac{1}{10} = -\frac{373}{150} = -2.48\overline{6}$$

Hinweis für den Korrektor: Angabe als Bruch reicht.

6. **Untermannigfaltigkeiten** **(6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \left\{(x,y,z) \in (0,\infty)^3 \,|\, z = \sqrt{xy}\right\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist **[3]** und bestimmen Sie den Tangentialraum im Punkt $p = (3,12,6)$ **[3]**.

LÖSUNG:

M ist die Nullstellenmenge der C^∞ Funktion

$$f : (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = z - \sqrt{xy}.$$

Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}, 1\right) \neq (0,0,0) \quad \forall (x,y,z) \in (0,\infty)^3$$

damit ist $(0,0,0)$ regulärer Wert von f und M eine Untermannigfaltigkeit.
Der Tangentialraum T_pM ist das Orthokomplement des Gradienten $\nabla f(p) = (-1,-1/4,1)$ also

$$T_pM = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z - x - y/4 = 0\}$$

7. **Extrema mit Nebenbedingungen** **(10 Punkte)**

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x + y + z$$

längs der Ellipse in der die Ebene E den Zylinder Z schneidet

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + z = 1\} \quad Z = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = 4\}$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass der Durchschnitt von E und Z kompakt ist.

LÖSUNG:

Die Nebenbedingungen sind $g_1(p) = g_2(p) = 0$ mit

$$g_1(x, y, z) = x + z - 1, \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4$$

Die Funkionen f, g_1, g_2 sind glatt und

$$\nabla g_1(x, y, z) = (1, 0, 1), \quad \nabla g_2(x, y, z) = (2x, 2y, 0), \quad \nabla f(x, y, z) = (1, 1, 1).$$

Offenbar sind $\nabla g_1(p)$ und $\nabla g_2(p)$ für alle p die die Nebenbedingung erfüllen linear unabhängig. Daher müssen die Extremalpunkte die Bedingung

$$\nabla f(p) - \lambda_1 \nabla g_1(p) - \lambda_2 g_2(p) = 0$$

für geeignete Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ erfüllen [**3**]. Wir erhalten also fünf Gleichungen [**1**]

$$\begin{gathered} 1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 x = 0, \quad 1 - 2\lambda_2 y = 0, \quad 1 - \lambda_1 = 0 \\ x + z = 1, \quad x^2 + y^2 = 4 \end{gathered}$$

Dies ergibt zunächst $\lambda_1 = 1$ und somit $2\lambda_2 x = 0$. Wegen $\lambda_2 y = 1$ muss $\lambda_2 \neq 0$ gelten. Also ist $x = 0$. Damit ist $y = \pm 2$ und $z = 1$. Für λ_2 ergibt sich schließlich $\lambda_2 = \pm 1/4$ [**3**]. (*Hinweis* zur Korrektur: λ_2 muss nicht bestimmt werden.) Wir erhalten somit zwei stationäre Punkte:

$$p_1 = (0, 2, 1), \; p_2 = (0, -2, 1) \quad \text{mit} \quad f(p_1) = 3, f(p_2) = -1 \quad [\mathbf{1}]$$

Da die Menge $\{p \in \mathbb{R}^3 \,|\, g_1(p) = g_2(p) = 0\}$ kompakt ist (und f stetig) werden Maximum und Minimum angenommen – müssen also stationäre Punkte sein. Somit ist p_1 das Maximum und p_2 das Minimum [**1**].

8. **Vektoranalysis** **(6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für $v \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ die Identität

$$\nabla \times (\nabla \times v) = \nabla(\nabla \cdot v) - \Delta v \quad \text{mit } \Delta v = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$$

gilt.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
\big(\nabla \times (\nabla \times v)\big)_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \times v)_k = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \sum_{lm} \epsilon_{klm} \partial_l v_m \quad [\mathbf{2}] \\
&= \sum_{jlm} \left(\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \right) \partial_j \partial_l v_m \quad [\mathbf{1}] \\
&= \sum_{jlm} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, \partial_j \partial_l v_m = \sum_j \partial_j \partial_i v_j - \sum_j \partial_j \partial_j v_i \quad [\mathbf{1}] \\
&= \partial_i \sum_j \partial_j v_j - \Big(\sum_j \partial_j \partial_j \Big) v_i = \partial_i (\nabla \cdot v) - \Delta v_i = (\nabla(\nabla \cdot v) - \Delta v)_i. \quad [\mathbf{2}]
\end{aligned}$$