................
Note

| Name | Vorname |
|---|---|
| | |

| Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach) |
|---|---|---|
| | | |

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

# Klausur
# Mathematik 3 für Physiker
# (Analysis 2)

Prof. Dr. M. Keyl

29. Juli 2016, 11:00 – 12:30 Uhr

Hörsaal: ............. Reihe: ............. Platz: .............

## Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **64 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

| | I | II |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| $\sum$ | | |

I ................
Erstkorrektur

II ................
Zweitkorrektur

## Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von ........ bis ........

Vorzeitig abgegeben um ........

Besondere Bemerkungen:

1. **Kurvenintegral** **(6 Punkte)**

Gegeben Sei die Kurve $\gamma$ von $(0,0)$ nach $(1,0)$ die sich aus der Teilkurve $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t)$ und der Strecke $\gamma_2$ von $(1,1)$ nach $(1,0)$ zusammensetzt (d.h. wir durchlaufen erst $\gamma_1$ von $(0,0)$ nach $(1,1)$ und dann $\gamma_2$ von $(1,1)$ nach $(1,0)$). Berechnen sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma X(y) \cdot dy \quad \text{mit} \quad X(x) = (2x_1x_2 - x_1^2, x_1 + x_2^2)$$

2. **Differenzierbarkeit** **(12 Punkte)**

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x_1^3 - 3x_1x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \text{ für } x \neq 0 \quad \text{und} \quad f(0) = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass in Polarkoordinaten $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$ gilt:

$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = r\cos(3\varphi)$$

*Hinweis:* Benutzen Sie (ohne Beweis) die trigonometrische Formel $\cos(3\varphi) = 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)$

(b) Folgern Sie aus (a) dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $|f(x)| \leq \|x\|$. Warum folgt daraus, dass $f$ in 0 stetig ist?

(c) Beweisen Sie ferner, dass die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(0)$ und $\partial_2 f(0)$ existieren, und geben Sie deren Wert an.

(d) Betrachten Sie zusätzlich die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t)$ und zeigen Sie dass die Gleichung

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

für $t = 0$ nicht gilt.

3. **Taylorentwicklung** **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung bis zur 6-ten Ordnung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)},$$

mit dem Ursprung als Entwicklungspunkt.

$T_6 f((x, y); (0, 0)) =$

4. **Extrema** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (x - 6)^2 + (x + 2)y^2 + 10,$$

und die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$,

$$x_1 = (2, 4), \quad x_2 = (-2, 4), \quad x_3 = (6, 2), \quad x_4 = (-2, -4), \quad x_5 = (6, 0).$$

Welche Aussagen sind richtig?

(a) $f$ besitzt einen kritischen Punkt in **[2]**

☐ $x_1$ ☐ $x_2$ ☐ $x_3$ ☐ $x_4$ ☐ $x_5$ ☐ nirgendwo

(b) $f$ besitzt eine lokales Minimum in **[2]**

☐ $x_1$ ☐ $x_2$ ☐ $x_3$ ☐ $x_4$ ☐ $x_5$ ☐ nirgendwo

(c) $f$ besitzt eine lokales Maximum in **[2]**

☐ $x_1$ ☐ $x_2$ ☐ $x_3$ ☐ $x_4$ ☐ $x_5$ ☐ nirgendwo

(d) $f$ besitzt einen Sattelpunkt in **[2]**

☐ $x_1$ ☐ $x_2$ ☐ $x_3$ ☐ $x_4$ ☐ $x_5$ ☐ nirgendwo

*Hinweis:* Für eine $2 \times 2$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt: $\det A < 0 \Leftrightarrow A$ nicht singulär und indefinit (= einen strikt positiven und einen strikt negativen Eigwert).

5. **Implizite Funktionen** **(8 Punkte)**

Betrachten Sie die Funktion: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 10x^2 + 12xy + 10y^2 + 8x + 24y$$

und den Punkt $(x_0, y_0) = (0, -12/5)$.

(a) Zeigen Sie, dass offene Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}$ von $x_0, y_0$ und eine eindeutige Funktion $y \in \mathrm{C}^\infty(U, V)$ existieren, so dass

$$f(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in U$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung $y'(0)$ in Punkt 0.

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ an die Höhenlinie $N_f(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ im Punkt $(x_0, y_0)$.

(d) Geben Sie eine Approximation für $y(0.1)$ an.

6. **Untermannigfaltigkeiten** **(6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \left\{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid z = \sqrt{xy}\right\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie den Tangentialraum im Punkt $p = (3, 12, 6)$ .

7. **Extrema mit Nebenbedingungen** **(10 Punkte)**

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x + y + z$$

längs der Ellipse in der die Ebene $E$ den Zylinder $Z$ schneidet

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 1\} \quad Z = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

*Hinweis:* Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass der Durchschnitt von $E$ und $Z$ kompakt ist.

8. **Vektoranalysis** **(6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für $v \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ die Identität

$$\nabla \times (\nabla \times v) = \nabla(\nabla \cdot v) - \Delta v \quad \text{mit } \Delta v = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$$

gilt.