Zentralübung

Z10.1. Das Achsenkreuz ist keine Mannigfaltigkeit

(a) Das Achsenkreuz $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\}$ ist keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

(b) $X \setminus \{(0,0)\}$ ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

Z10.2. Stereographische Projektion

Wir betrachten die beiden Abbildungen $\Phi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^3 \setminus \{p_\pm\}$,

$$\Phi_\pm(x) = p_\pm + \frac{2}{\|x - p_\pm\|^2}(x - p_\pm) \quad U_\pm = \mathbb{R}^3 \setminus \{p_\pm\}$$

mit $p_\pm = (0, 0, \mp 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\{(U_+, \Phi_+), (U_-, \Phi_-)\}$ ein Atlas von S^2 ist.

(b) Wie lautet der Kartenwechsel von Φ_+ nach Φ_-?

Tutoraufgaben

T10.1. Der Torus im $\mathbb{R}^4$

Sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_3^2 + x_4^2 - 1 \end{pmatrix}$ und $T := F^{-1}(\{(0,0)\}) \subset \mathbb{R}^4$

(a) Zeigen Sie, dass T eine 2–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

(b) Geben Sie einen Atlas von T an.

(c) Geben Sie für $p \in T$ explizit T_pT und N_pT an.

T10.2. Nulldimensionale und n-dimensionale C^α–Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Ein Punkt $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *isoliert* in M, wenn für ein $\epsilon > 0$ gilt, dass $M \cap U_\epsilon(x) = \{x\}$. Eine Menge M die nur aus isolierten Punkten besteht, heißt *diskret*. Für beliebiges α gilt:

(a) Die n-dimensionalen C^α–Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind die offenen Mengen.

(b) Die nulldimensionalen C^α–Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind die diskreten Mengen.

Hausaufgaben

H10.1. Ein Torus im $\mathbb{R}^3$

Zeigen Sie, dass der Torus

$$T = \big\{((R + r\cos\varphi)\cos\theta, (R + r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi, \theta \in \mathbb{R}\big\}$$

für feste $0 < r < R$ eine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

H10.2. Hyperboloid

Für $c \in \mathbb{R}$ sei $H_c := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + c\}$.
Zeigen Sie:

(a) Für $c \neq 0$ ist H_c eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

(b) H_0 ist keine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

H10.3. Kegel

Gegeben ist die Menge $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0,\ z^2 = x^2 + y^2\}$.

(a) Begünden Sie, dass M eine 2-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Skizzieren Sie M.

(c) Geben sie zu $p \in M$ den Tangentialraum T_pM und den Normalenraum N_pM an.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 29.6.16, 14.00 Uhr, Briefkasten UG Mathematikzentrum