TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Keyl
M. Kech

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2) MA9203

Sommersem. 2016
Blatt 9
(10.6.2016)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2016S

Zentralübung

Z9.1. Störungsrechnung

Sei $p(x)$ ein reelles Polynom mit der einfachen Nullstelle $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Man zeige: Ist α klein genug, so besitzt das Polynom $p(x) - \alpha$ eine Nullstelle in der Nähe von x_0.

b) Sei $x_0(\alpha)$ für kleine α die in (a) erwähnte Nullstelle. Man entwickle $x_0(\alpha)$ bis zur zweiten Ordnung in α.

Z9.2. Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten

Die C^2–Funktion $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto u(x, y)$ wird durch Einführung von Polarkoordinaten zu einer Funktion $U(r, \varphi)$. Es gelte die Laplace-Gleichung $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$.

(a) Wie erhält man U bei bekanntem u und umgekehrt.

(b) Wie lautet die Jacobi-Matrix der Transformation auf Polarkoordinaten $\Phi : (r, \varphi) \mapsto (x(r, \varphi), y(r, \varphi))$ und (geeignet eingeschränkt) ihrer Inversen Φ^{-1}?

(c) Berechnen Sie die Form der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten, d.h. die Differentialgleichung für $U(r, \varphi)$, die der Laplace-Gleichung für $u(x, y)$ entspricht.

(d) Finden Sie alle Lösungen dieser Gleichung, die nicht von φ abhängen.

Tutoraufgaben

T9.1. Implizit definierte Funktionen

Seine $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, mit $f(X_0) = g(X_0) = 0$, wobei $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Unter welcher Bedingung kann die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ im Punkt X_0 lokal nach z aufgelöst werden?
Wie lautet dann der Gradient der sich ergebenden Funktion $(x, y) \mapsto \tilde{z}(x, y)$ in einer Umgebung von (x_0, y_0), bzw., im Punkt (x_0, y_0) selbst?

(b) Unter welcher Bedingung können die beiden Gleichungen $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$, im Punkt X_0 lokal nach y und z aufgelöst werden?
Wie lautet dann die Ableitung der sich ergebenden Funktion $x \mapsto \binom{\tilde{y}(x)}{\tilde{z}(x)}$ bei x_0?

T9.2. Zustandsgleichungen

Ein einfaches thermodynamisches System wird durch die Zustandsgleichung $F(p, V, T) = 0$ beschrieben.

(a) Unter welchen Bedingungen kann die Zustandsgleichung lokal nach p, V, bzw., T aufgelöst werden?

(b) Sei $\tilde{p}(V, T)$ eine lokale Auflösung von $F(p, V, T) = 0$ nach p und F eine C^2–Funktion. Man beweise $\partial_V^2 \tilde{p}(V, T) = -\frac{F_p F_{VV} F_p - 2F_V F_{pV} F_p + F_V F_{pp} F_V}{(F_p)^3}\big|_{(\tilde{p}(V,T),V,T)}$, mit der Abkürzung $F_p := \partial_p F$, $F_V := \partial_V F$, $F_{Vp} := \partial_p \partial_V F$, ...

(c) Man interpretiere und beweise $\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1$ unter geeigneten Bedingungen.

Hausaufgaben

H9.1. Van–der–Waals–Gleichung

Ein reales Gas wird durch die Zustandsgleichung $F(p,V,T) = 0$,
$F(p,V,T) = \big(p + \frac{a}{V^2}\big)(V-b) - RT$ mit Konstanten $a, b \geq 0$, $R > 0$ beschrieben.

(a) Man überprüfe die Aussage in Aufgabe T9.2(c) explizit für $a = b = 0$ (Ideales Gas).

(b) Sei nun $a, b > 0$. Zeigen Sie, dass sich $F|_{\mathbb{R}_+ \times (b,\infty) \times \mathbb{R}_+}$ global nach p auflösen läßt. Skizzieren Sie $V \mapsto p(V,T)$ für $a = 27$, $b = 1$, $R = 1$ und $T = 7, 8, 9$ für $V \in (b, 8]$.

(c) Bestimmen Sie den Punkt $(p_c, V_c, T_c) \in F^{-1}(\{0\})$, in dem sowohl $\partial_V p(V_c, T_c) = 0$, als auch $\partial_V^2 p(V_c, T_c) = 0$ ist (kritischer Punkt).

H9.2. Implizit definierte Funktionen

Seien $f_1(t,x,y) = \log x + y^2 t - 4$, $f_2(t,x,y) = x^2 + yt^2 + t^2$ für $t, x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, und $P = (1, 1, -2)$. Es gilt $f_1(P) = f_2(P) = 0$.

(a) Die Gleichung $f_1(t,x,y) = 0$ kann offenbar in einer Umgebung des Punktes P lokal nach y aufgelöst werden. Man erhält die Funktion $(t,x) \mapsto \tilde{y}(t,x)$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} \tilde{y}(1,1)$.

(b) Der Punkt P ist eine Lösung des Gleichungssystems $f_1(t,x,y) = 0$, $f_2(t,x,y) = 0$, bzw., der Gleichung

$$f(t,x,y) = 0$$

mit $f = \binom{f_1}{f_2} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Diese soll in einer Umgebung von P lokal nach x und y aufgelöst werden. Die Invertierbarkeit welcher Matrix muss dazu überprüft werden?

(c) Die lokale Aufösung von $f(t,x,y) = 0 \in \mathbb{R}^2$ nach x und y im Punkt P ergibt die beiden Funktionen $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, definiert in einer Umgebung von $t = 1$. Berechnen Sie $\dot{\bar{x}}(1)$ und $\dot{\bar{y}}(1)$.

H9.3. Störungsrechnung

$V_\alpha(x) = (x^2 - 1)^2 - \alpha x$, $x \in \mathbb{R}$, ist ein Doppelmuldenpotential in einem konstanten elektrischen Feld der Stärke $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen und klassifizieren Sie die lokalen Extrema für $\alpha = 0$.

(b) Wie verändern sich die Positionen der lokalen Extrema von V_α in Abhängigkeit von α, entwickelt bis zur zweiten Ordnung um $\alpha = 0$?

(c) Geben Sie die Werte von V_α und V_α'' in den Extremalstellen bis zur zweiten Ordnung in α an.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 22.6.16, 14.00 Uhr, Briefkasten UG Mathematikzentrum