TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Keyl
M. Kech

Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2) MA9203

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2016S

Sommersem. 2016
Blatt 8
(3.6.2016)

Zentralübung

Z8.1. Methode der kleinsten Quadrate

Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times 2}$, mit $M^{\mathrm{T}}M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Bestimmen Sie den kritischen Punkt x^* der Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x) = |b - Mx|^2$.

(b) Zeigen Sie, dass $F(x) = |M(x - x^*)|^2 + C$ mit einer Konstanten $C \geq 0$.

(c) Seien $(v_i, a_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, 100$, Messwerte der Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Autos jeweils zu den Zeiten t_i, $t_i < t_{i+1}$. Das Auto wurde auf ebener Strecke zur Zeit $t_0 < t_1$ ausgekuppelt und rollte aus. Gesucht sind die Koeffizienten der Funktion $a(v) = \mu + \beta v^2$, aus denen sich Rollreibung und Luftwiderstandsbeiwert des Autos bestimmen lassen, so dass die quadratische Abweichung $\sum_i |a_i - a(v_i)|^2$ minimal ist. Geben Sie explizite Formeln für μ, β an.

Z8.2. Der Satz über implizite Funktionen, linearer Fall

Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear, $b \in \mathbb{R}^m$. Unter welcher Bedingung ist das Gleichungssystem $f(x, y) = b$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ nach y auflösbar? Man gebe explizit die implizit definierte Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an, für die $f(x, g(x)) = b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Tutoraufgaben

T8.1. Taylorentwicklung des Coulombpotentials

Sei $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{|x|}$. Für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ entwickele man $F(x + h)$, bis zur zweiten Ordnung in h.

T8.2. Monopol, Dipol, Quadrupol

Sei $\rho : [-1, 1]^3 \to \mathbb{R}$ eine stetige Ladungsverteilung. Bestimmen Sie die führenden Ordnungen in $\frac{1}{|x|}$ des Potentials $V(x) = \iiint_{-1}^{1} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy_1 dy_2 dy_3$, für $|x| > 2$.

T8.3. Das Maximum liegt auf dem Rand

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig und stetig differenzierbar auf U mit $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass $g : \overline{U} \to \mathbb{R}$, $g(X) = |f(x)|$ sein Maximum auf dem Rand annimmt.

Hausaufgaben

H8.1. Taylorentwicklungen

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der folgenden Funktionen um den Ursprung.

(a) $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 \cdots x_m$ bis zur m-ten Ordnung.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(x^3 y^2)$ bis zur 25-ten Ordnung.

Geben Sie jeweils alle partiellen Ableitungen (ausgewertet im Ursprung) explizit an.

H8.2. Taylorentwicklungen

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der folgenden Funktionen bis zur zweiten Ordnung.

(a) $f(x, y) = \frac{1+x^2-2y^2}{\sqrt{4+xy}}$ im Entwicklungspunkt $(0, 0)$,

(b) $f(x, y) = x^2 \sin \frac{xy}{2}$ im Entwicklungspunkt $(1, \pi)$.

H8.3. Extremwertbestimmung

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$

(a) (i) eine Funktion, deren Graph Tangentialebene an den Graph G_f bei $(x_0, 2)$ ist,
(ii) eine quadratische Funktion, die mit f bis zu den zweiten Ableitungen bei $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ übereinstimmt,

(b) lokale und globale Extremstellen und Sattelpunkte,

(c) Maximum und Minimum für $(x, y) \in [-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}] \times [-2, 2]$.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 15.6.16, 14.00 Uhr, Briefkasten UG Mathematikzentrum