Prof. Dr. M. Keyl
M. Kech

Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2) MA9203

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2016S

Sommersem. 2016
Blatt 7
(27.5.2016)

Zentralübung

Z7.1. Multinomische Formel

Für $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}_0^n$ setzen wir $|p| := p_1 + \dots + p_n$, $p! := p_1! \cdots p_n!$ und für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $x^p := x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$.

(a) Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist $\{q \in \mathbb{N}_0^{n+1}, |q| = k\} = \{(p_1, \dots, p_n, l) \in \mathbb{N}_0^{n+1} : p \in \mathbb{N}_0^n, |p| = k - l\}$.

(b) $|\{p \in \mathbb{N}_0^n, |p| = k\}| = \binom{n+k-1}{k}$.

(c) Für $p \in \mathbb{N}_0^n$, $|p| = k$, ist $|\{f : \{1, .., k\} \to \{1, .., n\} \, : \, |f^{-1}(j)| = p_j, \, j = 1, \dots, n\}| = \frac{k!}{p!}$.

(d) Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist $(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum\limits_{\substack{p \in \mathbb{N}_0^n \\ |p| = k}} \frac{k!}{p!} x^p$ (mit Induktion über n).

Z7.2. Höhere Richtungsableitungen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar, $a, v \in \mathbb{R}^2$. Drücken Sie die k-te Richtungsableitung $\partial_v^{(k)} f(a)$ durch die partiellen Ableitungen von f aus, $k = 1, 2, 3$.

Tutoraufgaben

T7.1. Topologische Räume

Betrachten Sie die Menge $M := M_1 \cup M_2 \cup M_3$ mit

$$M_1 := \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leq 0\}, \quad M_2 := \{(x, -1) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leq 0\} \quad M_3 := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$$

und die Abbildungen

$$f_1 : M_1 \cup M_3 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x, \quad f_2 : M_2 \cup M_3 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x,$$

Wir definieren: Eine Menge $U \subset M$ heißt *Umgebung* eines Punktes $p \in U$, wenn eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}$ existiert, so dass $p \in f_1^{-1}(V) \subset U$ oder $p \in f_2^{-1}(V) \subset U$ ist. Zeigen Sie:

(a) Das Mengensystem

$$\mathcal{T} = \{A \subset M \,|\, \forall p \in A \ \exists \text{ Umgebung } U \text{ mit } p \in U \subset A\}$$

ist eine *Topologie* von M, d.h. es gelten die folgenden Aussagen:

(i) $M \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$.

(ii) $\forall \mathcal{M} \subset \mathcal{T}$: $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A \in \mathcal{T}$

(iii) $\forall \mathcal{E} \subset \mathcal{T}$ endlich: $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A \in \mathcal{T}$

(b) Die Abbildungen $f_k^{-1} : \mathbb{R} \to M_k \subset M$ sind stetig, d.h. die Urbilder offener Mengen sind stetig ($A \subset M$ offen $:\Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$).

(c) Es gibt keine Metrik auf M, so dass $\mathcal{T}$ zur Menge der offenen Mengen dieser Metrik wird.

T7.2. Wärmeleitungsgleichung

Sei $L := \{u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R} : u(x,t)$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $\partial_t u = \frac{D}{2}\partial_x^2 u\}$ die Menge aller Lösungen der Wärmeleitungsgleichung mit Diffusionskonstante $D > 0$. Eine solche Lösung beschreibt zum Beispiel die zeitabhängige Temperaturverteilung in einem eindimensionalen Wärmeleiter.

(a) Zeigen Sie, dass L ein Vektorraum ist.

(b) Sei $u_{x_0}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D\,t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2Dt}}$. Zeigen Sie, dass $u_{x_0} \in L$ ist und skizzieren Sie mit $D = 1$ die Graphen von $x \mapsto u_{x_0}(x,t)$ für verschiedene Werte von t.

Hausaufgaben

H7.1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$.

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x, y \in U$, so dass auch die Verbindungsstrecke $\lambda x + (1-\lambda)y \in U$ für alle $\lambda \in [0,1]$. Dann gibt es ein $\lambda \in [0,1]$, so dass für $z := \lambda x + (1-\lambda)y$ gilt: $f(y) - f(x) = \nabla f(z)\cdot(y-x)$.

H7.2. Eine differenzierbare Funktion, die nicht stetig partiell differenzierbar ist

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq 0$, $f(0,0) = 0$. Zeigen sie, dass f (total) differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.

H7.3. Harmonischer Oszillator

Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = e^{-|x|^2/2},$$

eine Eigenfunktion der Schrödinger-Gleichung des harmonischen Oszillators ist, d.h. es gibt ein $E \in \mathbb{R}$ mit

$$\left(-\Delta + |x|^2\right)\psi(x) = E\,\psi(x).$$

Bestimmen Sie den Eigenwert E.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 8.6.16, 14.00 Uhr, Briefkasten UG Mathematikzentrum