Prof. Dr. M. Keyl
M. Kech

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2) MA9203

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2016S

Sommersem. 2016
Blatt 6
(20.5.2016)

Zentralübung

Z6.1. Komponentenweise Differenzierbarkeit

Gegeben sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen.

Zeigen Sie, dass f genau dann differenzierbar bei $x \in U$ ist wenn alle Komponentenabbildungen $f_j : U \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, bei $x \in U$ differenzierbar sind.

Z6.2. Linearität der Ableitung

Seien $f, g : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, differenzierbar bei $x \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $D(\lambda f)(x) = \lambda Df(x)$,

(b) $D(f + g)(x) = Df(x) + Dg(x)$.

(c) Sei nun $U = \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Wie lautet $Df(x)$?

Tutoraufgaben

T6.1. Differenzierbarkeit

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq 0, \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$$

Man zeige:

(a) f ist partiell differenzierbar,

(b) f, $\partial_x f$ und $\partial_y f$ sind nicht stetig.

T6.2. Ableitung von Produkten

Seien $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ und $h : U \to \mathbb{R}$ bei $x \in U$ differenzierbar. Zeigen Sie wie in der Vorlesung für das Skalarprodukt, dass

$$D(hf)(x) = f(x)Dh(x) + h(x)Df(x) \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

T6.3. Ableitungen von Polynomen

Die Dreifachfolge $(a_{klm})_{k,l,m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ habe nur endlich viele von Null verschiedene Glieder. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} a_{klm} x_1^k x_2^l x_3^m.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(x)$, und zeigen Sie, dass $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$, $i, j = 1, 2, 3$.

(b) Sei nun $a_{klm} = 0$ für $k + l + m > 2$. Zeigen Sie, dass f in der Form

$$f(x) = \tfrac{1}{2} x^T Ax + b^T x + c$$

geschrieben werden kann, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch ist, $b \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$.

(c) Drücken Sie A, b, c in Teilaufgabe (b) durch die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt aus.

Hausaufgaben

H6.1. Höhenlinien und Gradienten

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$.

(a) Skizzieren Sie $\text{grad} f$ und die Höhenlinien von f.

(b) Bestimmen Sie die Tangente an die Höhenlinie durch den Punkt $(x_0, y_0) \neq 0$ und zeigen Sie, dass sie senkrecht auf dem Gradienten an diesem Punkt steht.

(c) Geben Sie Lösungen des AWP $\binom{\dot{x}}{\dot{y}} = \text{grad} f(x, y)$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ an und skizzieren Sie die Spur dieser Kurve.

H6.2. Partielle Ableitungen

(a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion und $a \in \mathbb{R}^3$. Wie ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \in \mathbb{R}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \in \mathbb{R}$ definiert? Wie sind die Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\text{grad} f$ und $\partial_v f$, $v \in \mathbb{R}^3$, $|v| = 1$, definiert?

(b) Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen, den Gradienten und die Richtungsableitung in Richtung $\binom{1}{-1}$ der Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$,
(i) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_1 x_2 + x_2$, (ii) $g(x, y) = xy^2 + ye^{-xy}$, (iii) $h(a, b) = a \sin b$

H6.3. Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0, \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$

(a) Berechnen Sie $\partial_1 f, \partial_2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass beide Funktionen stetig sind.

(b) Berechnen Sie $\partial_1 \partial_2 f, \partial_2 \partial_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass beide Funktionen nur auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ übereinstimmen.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 1.6.16, 14.00 Uhr, Briefkasten UG Mathematikzentrum