TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Keyl
M. Kech

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2) MA9203

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2016S

Sommersem. 2016
Blatt 5
(13.5.2016)

Zentralübung

Zentralübung entfällt wegen Feiertag

Tutoraufgaben

T5.1. Schachtelung kompakter Mengen

Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Folge von nichtleeren Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M heißt Schachtelung, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_{n+1} \subset A_n$. Der Durchschnitt einer Schachtelung ist $A_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(a) Man zeige: Sind die A_n alle kompakt, so ist A_∞ nichtleer.

(b) Geben Sie ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$ bei dem alle A_n abgeschlossen sind und $A_\infty = \emptyset$.

(c) Geben Sie ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$ bei dem alle A_n beschränkt sind und $A_\infty = \emptyset$.

T5.2. Durchschnitte kompakter und abgeschlossener Mengen

Sei (M, d) ein metrischer Raum $K \subset M$ kompakt und $A \subset M$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass $A \cap K$ kompakt ist.

T5.3. Satz von Dini

(M, d) sein ein kompakter, metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : M \to \mathbb{R}$ die punktweise und streng monoton steigend (also $m > n \Rightarrow f_m(x) > f_n(x)$ $\forall x \in M$) gegen eine stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Konvergenz sogar gleichmäßig ist.

Hausaufgaben

H5.1. Kompakte Mengen sind beschränkt

Man zeige: Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist beschränkt.

H5.2. Stetigkeit der Umkehrfunktion

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $D \subset X$ kompakt und $f : D \to Y$ stetig und injektiv. Dann ist $f^{-1} : f(D) \to D$ stetig. Hinweis: T5.2.

H5.3. Orthogonale Gruppe

Betrachten Sie den Raum $\mathbb{R}^{n\times n}$ der reellen $n \times n$ Matrizen mit der Operatornorm, und zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{O}(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ der orthogonalen Matrizen kompakt ist.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 25.5.16, 14.00 Uhr, Briefkasten UG Mathematikzentrum