TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Keyl
M. Kech

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2) MA9203

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2016S

Sommersem. 2016
Blatt 4
(6.5.2016)

Zentralübung

Z4.1. Urbilder stetiger Funktionen

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$.

(a) Dann ist äquivalent:
  (i) f ist stetig.
  (ii) Für jedes offene $V \subset Y$ ist $f^{-1}(V)$ offen.
  (iii) Für jedes abgeschlossene $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(b) Finden sie Beispiele für
  (i) eine offene Menge, deren stetiges Bild nicht offen ist.
  (ii) eine abgeschlossene Menge, deren stetiges Bild nicht abgeschlossen ist.

(c) Warum sind die Höhenlinien einer topographischen Karte immer abgeschlossene Mengen? Was gilt für den Bereich zwischen zwei Höhenlinien?

Z4.2. Die Abstandsfunktion ist stetig.

Die Abstandsfunktion $d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ eines metrischen Raumes (M, d) ist stetig, d.h., sind (x_n) und (y_n) zwei in M konvergente Folgen, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d\big(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\big)$$

Tutoraufgaben

T4.1. Vollständige Teilräume

(M, d) sei ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset M$ eine beliebige Teilmenge. Auf A definieren wir die Einschränkung von d:

$$d_A : A \times A \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d_A(x, y) = d(x, y).$$

Zeigen Sie, dass der metrische Teilraum (A, d_A) genau dann vollständig ist, wenn A abgeschlossen ist.

T4.2. Stetigkeit

(a) Seien $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:
$f + g$ und $f \cdot g$ sind stetig, $\frac{f}{g}$ ist stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^m$, in dem $g(x) \neq 0$.

(b) Seien (M_i, d_i), $i = 1, 2, 3$, metrische Räume und $f : M_2 \to M_3$, $g : M_1 \to M_2$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $f \circ g : M_1 \to M_3$ stetig ist.

(c) Sei $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Zeigen Sie, dass $[a, b] \ni t \mapsto F(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \in \mathbb{R}$ stetig ist.

T4.3. Stereographische Abbildung

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(X, Y) = \left(\frac{2}{1 + X^2 + Y^2} X, \frac{2}{1 + X^2 + Y^2} Y, \frac{1 - X^2 - Y^2}{1 + X^2 + Y^2} \right)$$

heißt stereographische Abbildung. Zeigen Sie:

(a) f ist stetig und $f(\mathbb{R}^2) \subset S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| = 1\}$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist stetig.

Hausaufgaben

H4.1. Beschränkte Funktionen

Betrachten Sie den Raum

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \,|\, \exists K > 0 \, \forall x \in [0,1] \, : |f(x)| < K\}$$

der beschränkten $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf $[0,1] \subset \mathbb{R}$ zusammen mit der sup-Norm:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Ferner sei $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}([0,1])$ eine Folge in $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}([0,1])$. Zeigen Sie:

(a) (f_n) Cauchyfolge $\Rightarrow$ (f_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{C}$.

(b) (f_n) konvergiert punktweise aber nicht gleichmäßig $\Rightarrow$ (f_n) ist keine Cauchyfolge.

(c) Im Falle gleichmäßiger Konvergenz ist $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}([0,1])$.

(d) Benutzen Sie (a) – (c) um zu zeigen, dass $(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

(e) Zeigen, Sie dass auch der Raum stetiger Funktionen $(C^0_{\mathbb{C}}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

H4.2. Abstand eines Punktes von einer Menge

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer. Der Abstand von $x \in \mathbb{R}^n$ zur Menge A ist definiert als

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{|x - y| \,|\, y \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{dist}(x, A)$ stetig ist.

(b) Ist $x \notin A$, so gibt es ein $y \in \partial A$ mit $|x - y| = \operatorname{dist}(x, A)$.

H4.3. Unstetigkeitsstellen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Warum ist f stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

(b) Zeigen Sie, das f im Nullpunkt nicht stetig ist.
Hinweis: Bestimmen Sie y_n, so dass $f(x_n, y_n)$ für $x_n = \frac{1}{n}$ konstant ist.

(c) Zeigen Sie, dass nicht nur $f(\cdot, y)$ und $f(x, \cdot)$ sondern auch $t \mapsto f(t, \alpha t + \beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 18.5.16, 14.00 Uhr, Briefkasten UG Mathematikzentrum