TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. KEYL
M. KECH

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2) MA9203

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2016S

Sommersem. 2016
Blatt 3
(29.4.2016)

Zentralübung

Z3.1. Parameterinvarianz des Kurvenintegrals

Für die C^1-Kurve $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sei $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine C^1-Parametertransformation, $\tilde{x} = x \circ \phi$. Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, so gilt

$$\int_{\tilde{x}} F(y) \cdot \mathrm{d}y = (\operatorname{sgn} \phi') \int_{x} F(y) \cdot \mathrm{d}y$$

Z3.2. Innere, äußere und Randpunkte

Sei (M, d) ein metrischer Raum, $A \subset M$. Der Abstand eines Punktes x von A ist definiert als

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \, : \, y \in A\}$$

Wir definieren den signierten Abstand,

$$\operatorname{sdist}(x, A) := \begin{cases} \operatorname{dist}(x, A), & x \notin A, \\ -\operatorname{dist}(x, M \setminus A), & x \in A. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie für $A =]-2, -1[\cup \{0\} \cup [1, 2] \subset \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto \operatorname{sdist}(x, A)$.

(b) Man zeige:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} & \operatorname{sdist}(x, A) < 0 &\quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathring{A}, \\ &\text{(ii)} & \operatorname{sdist}(x, A) = 0 &\quad \Leftrightarrow \quad x \in \partial A, \\ &\text{(iii)} & \operatorname{sdist}(x, A) > 0 &\quad \Leftrightarrow \quad x \in M \setminus \overline{A}. \end{aligned}$$

Z3.3. Vereinigung und Durchschnitt von offenen und abgeschlossenen Mengen.

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

(a) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen:
Sei I eine beliebige Menge und zu jedem $i \in I$ sei $A_i \subset M$ offen. Dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ offen.

(b) Endliche Schnitte offener Mengen sind offen:
Sei I eine endliche Menge und zu jedem $i \in I$ sei $A_i \subset M$ offen. Dann ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ offen.

(c) Wie lauten die analogen Aussagen für abgeschlossene Mengen?

(d) Geben sie je ein Beispiel dafür an, dass der Schnitt abzählbar vieler offener Mengen nicht wieder offen zu sein braucht und dass die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen nicht wieder abgeschlossen zu sein braucht.

Tutoraufgaben

T3.1. Ein einfaches Kurvenintegral

Berechnen sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $F(x,y,z) = (-y,x,z)$ entlang einer Schraubenlinie konstanter Steigung um die z-Achse, die von $(1,0,0)$ nach $(1,0,2\pi)$ läuft.

T3.2. Innere, äußere und Randpunkte

Sei (M,d) ein metrischer Raum, $A \subset M$. Als Abkürzung setzen wir $A^c = M \setminus A$.

(a) Man zeige: $x \in \partial A$ genau dann, wenn jede Umgebung von x sowohl Punkte von A, als auch Punkte von A^c enthält.

(b) Vervollständigen Sie:

Formel	x ist	innerer Punkt oder	Randpunkt oder	äußerer Punkt	von A.
$x \in \mathring{A}$		☐	☐	☐	
$x \in \overline{A}$		☐	☐	☐	
$x \in \partial A$		☐	☐	☐	
$x \in (\mathring{A^c})$		☐	☐	☐	
$x \in \left(\mathring{A}\right)^c$		☐	☐	☐	
$x \in \overline{A}^c$		☐	☐	☐	
$x \in \overline{A^c}$		☐	☐	☐	
$x \in$		☒	☐	☒	

T3.3. Beispiele für Inneres, Abschluss und Rand

Geben Sie das Innere, den Abschluss und den Rand folgender Mengen an und begründen Sie kurz.

(a) $M = (-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

(b) $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(c) $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

Hausaufgaben

H3.1. Beispiele für Kurvenintegrale

Wir betrachten drei Kurven im $\mathbb{R}^2$ von $A = (0,1)$ nach $B = (1,2)$,

- γ_1 ist die direkte Verbindung von A nach B,
- γ_2 ist der Streckenzug von A über $(1,1)$ nach B,
- γ_3 verläuft längs der Parabel $y = 1 + x^2$.

Berechnen Sie jeweils die Kurvenintegrale entlang γ_1, γ_2, γ_3 für die Vektorfelder

(a) $F_1(x,y) = \binom{x^2-y}{x+y^2}$,   (b) $F_2(x,y) = \binom{x^2+y}{x+y^2}$.

H3.2. Das Innere und der Abschluss

Sei (M,d) ein metrischer Raum, $A \subset M$.

(a) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.

(b) Ist A offen, so ist $A = \mathring{A}$.

(c) Das Innere von A ist offen.

(d) Ist A abgeschlossen, so ist $A = \overline{A}$.

(e) Der Abschluss von A ist abgeschlossen.

(f) ∂A ist abgeschlossen.

H3.3. Charakterisierung abgeschlossener Mengen

Sei (M, d) ein metrischer Raum, $A \subset M$.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die gegen $x \in M$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $x \in \overline{A}$.

(b) $\overline{A} = \left\{ x \in M \,|\, \text{es gibt eine Folge } a : \mathbb{N} \to A \text{ mit } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x \right\} =: \mathrm{GW}(A)$, die Menge der Grenzwerte von A.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 11.5.16, 14.00 Uhr, Briefkasten UG Mathematikzentrum