Prof. Dr. M. Keyl
M. Kech

Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2) MA9203

`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2016S`

Sommersem. 2016
Blatt 2
(22.4.2016)

Zentralübung

Z2.1. Zykloide als Graph, Bogenlänge

Die Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x(t) = \binom{t+\sin t}{1-\cos t}$, heißt Zykloide. Skizzieren Sie ihre Spur, berechnen Sie ihre Bogenlänge im Intervall $[-\pi, \pi]$ und geben Sie jeweils eine Parametrisierung durch die x_2- und die x_1-Koordinate auf geeigneten Teilkurven an.

Z2.2. Begleitendes Dreibein

Sei $x : [0, T] \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre zweimal stetig differenzierbare Kurve mit $\ddot{x}(t) \neq 0$ für $t \in [0, T]$. Dann gilt für das begleitende Dreibein und die Krümmung:

$$\begin{aligned}
\tau(t) &= \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} && \text{(Tangentialvektor)}\\
n(t) &= b(t) \times \tau(t) && \text{(Hauptnormalenvektor)}\\
b(t) &= \frac{\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)}{|\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)|} && \text{(Binormalenvektor)}\\
\kappa(t) &= \frac{|\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)|}{|\dot{x}(t)|^3} && \text{(Krümmung)}
\end{aligned}$$

Tutoraufgaben

T2.1. Die durch Bogenlänge parametrisierte Zykloide

Parametrisieren Sie die Zykloide $x : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $x(t) = \binom{t+\sin t}{1-\cos t}$ durch ihre Bogenlänge.

T2.2. Schmiegekreise der Parabel

Berechnen Sie das begleitende Dreibein und die Krümmungskreismittelpunkte der Parabelkurve $x(t) = (t, t^2, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

T2.3. Eine wichtige Parametrisierung für Ellipsen

Sei $p > 0$ und $\varepsilon \in (0, 1)$. Mit Hilfe der Funktion $r(\varphi) = \frac{\varepsilon p}{1+\varepsilon \cos \varphi}$ definieren wir die Kurve $\tilde{x}(\varphi) = r(\varphi)\binom{\cos \varphi}{\sin \varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie $\operatorname{spur}(\tilde{x})$ (z.B. für $p = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$) in dem sie $\tilde{x}(\varphi)$ für $\varphi \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ berechnen.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in \operatorname{spur}(\tilde{x})$ die Beziehung $\varepsilon(p - x) = \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt und interpretieren diese geometrisch.

(c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{spur}(\tilde{x})$ eine Ellipse mit waagrechter großer Halbachse $a = \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}$, senkrechter kleiner Halbachse $b = \frac{\varepsilon p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ und Mittelpunkt $(x_0, y_0) = (-\frac{\varepsilon^2 p}{1-\varepsilon^2}, 0)$ ist.

Hausaufgaben

H2.1. Parametrisierung von Kreislinien im $\mathbb{R}^3$

Seien $n, x_0 \in \mathbb{R}^3$, $|n| = 1$. Um zu beweisen, dass die Kurve

$$x(t) = (x_0 \cdot n)n + \cos t(x_0 - (x_0 \cdot n)n) + \sin t(n \times x_0),$$

$t \in [0, 2\pi]$, auf einer Kreislinie liegt, zeige man:

a) Die drei Summanden von $x(t)$ stehen senkrecht aufeinander.

b) $(x_0 - (x_0 \cdot n)n)$ und $n \times x_0$ haben die gleiche Länge (man berechne $(n \times x_0) \times n$).

c) $|x(t) - m|$ ist unabhängig von t, wenn man $m \in \mathbb{R}^3$ geeignet wählt.

d) Warum liegt also $x(t)$ auf einem Kreis?

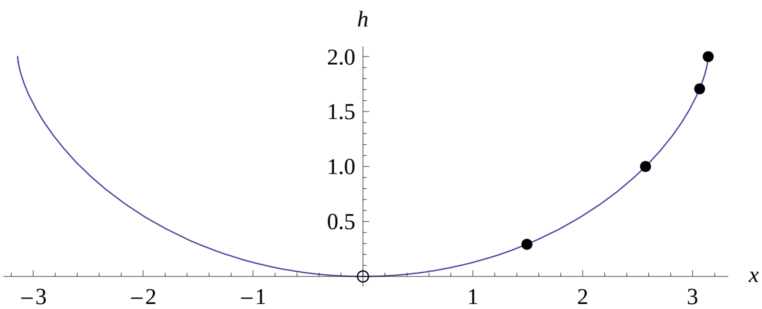
H2.2. Die Zykloide ist eine Tautochrone

Ein Massenpunkt bewegt sich reibungsfrei entlang der Zykloide $x : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$x(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi + \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Die Erdbeschleunigung ist $\binom{0}{-g}$, $g \approx \pi^2$. Berechnen Sie die Zeit, die der Massenpunkt zum tiefsten Punkt braucht, wenn er an einem Punkt der Zykloide der Höhe $h_0 \in (0, 2]$ losgelassen wird.

Hinweis: Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(0)$ des Startpunktes entlang der Zykloide. Die Tangentialgeschwindigkeit $\dot{s}$ ergibt sich aus der freigesetzten potentiellen Energie. Finden Sie nun anhand der erhaltenen Differentialgleichung ein T, so dass $s(T) = 0$ ist.



H2.3. Kegelschnitte

Gegeben seien $\epsilon \in (0, 1)$, ein Punkt $F \in \mathbb{R}^2$ und eine Gerade $g \subset \mathbb{R}^2$ mit dem Abstand $\operatorname{dist}(F, g) = p > 0$. Sei $E = \{X \in \mathbb{R}^2;\ |X - F| = \epsilon \operatorname{dist}(X, g)\}$.

(a) E ist eine Ellipse mit den Halbachsen $a = \frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}$ und $b = \frac{\epsilon p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$.

(b) Parametrisieren Sie E als Kurve bezüglich des Winkels um F (den Brennpunkt).

(c) Welche Kurven ergeben sich für $\epsilon \geq 1$. Skizzieren Sie.

Hinweis: Nehmen Sie ohne Einschränkung an, dass $F = (0, 0)$ und $g = \{-p\} \times \mathbb{R}$ ist.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 4.5.16, 10.00 Uhr, Briefkasten UG Mathematikzentrum