Prof. Dr. M. Keyl
M. Kech

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2) MA9203

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2016S

Sommersem. 2016
Blatt 1
(14.4.2016)

Zentralübung

Z1.1. Der Dirichlet-Kern

Sei $D_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Geben Sie eine Stammfunktion von $D_n(x)$ an, und berechnen Sie $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx$.

b) Man zeige: $D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\frac{x}{2}} & x \in \mathbb{R}\backslash(2\pi\mathbb{Z}), \\ 2n+1 & x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$

c) Skizzieren Sie (am besten mit einem Plot-Programm) den Graphen von $D_n(x)$ für $n = 0, 1, 2, 25$ im Bereich $[-2\pi, 2\pi]$.

Z1.2. Sinus- und Kosinuskoeffizienten

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle 2π-periodische Funktion mit den Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, deren Fourierreihe gegen f konvergiert. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}_0$

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x, \qquad b_k := \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x.$$

Die a_k, $k \geq 0$, heißen (Fourier-)Kosinuskoeffizienten,
die b_k, $k \geq 1$, heißen (Fourier-)Sinuskoeffizienten.

(a) Man drücke $\hat{f}_k$ durch die Sinus- und Kosinuskoeffizienten aus und umgekehrt.

(b) Es gilt $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$.

(c) Ist f eine gerade Funktion ($f(x) = f(-x)$), so sind die Sinuskoeffizienten gleich 0, ist f eine ungerade Funktion ($f(x) = -f(-x)$), so sind die Kosinuskoeffizienten gleich 0. Was bedeutet dies für die Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k$.

Tutoraufgaben

T1.1. Fourierkoeffizienten

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion mit den Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$.

(a) Für alle $y \in \mathbb{R}$ ist $\int\limits_{y-\pi}^{y+\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

(b) Wie lauten die Fourierkoeffizienten der verschobenen Funktion $g(x) = f(x-y)$?

(c) Wie lauten die Fourierkoeffizienten der π-periodischen Funktion $h(x) = f(2x)$?

T1.2. Fourierkoeffizienten

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x, & x \in (-\pi, 0) \\ \cos x, & x \in (0, \pi) \\ 0, & x = 0, \pi. \end{cases}$$

T1.3. Fourierkoeffizienten

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von $|\sin x|$.

Hausaufgaben

H1.1. Fourierreihe

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Skizzieren Sie $f(x)$ und bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f.

(b) Welchen Wert haben die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$?

H1.2. Fourierreihe

Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $x \in [-\pi, \pi]$ gegeben ist durch $f(x) := \cosh(ax)$.

(a) Entwickeln Sie f in eine (reelle) Fourierreihe.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}$.

H1.3. Eigenschaften von Fourier-Koeffizienten

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion und $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \in C^1(\mathbb{R})$, so ist $\widehat{(f')}(k) = ik\widehat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Ist $f \in C^m(\mathbb{R})$, so gibt es ein $C > 0$ mit $\left|\widehat{f}(k)\right| \leq \dfrac{C}{|k|^m}$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 27.4.16, Briefkasten UG Mathematikzentrum