18.3 Konservative Vektorfelder

Def 18.8 Ein Vektorfeld $X \in C(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt **konservativ**, falls für jede stückweise stetig diffbare Kurve $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt:

$$\oint_\gamma X(y) \cdot dy := \int_\gamma X(y) \cdot dy = 0$$

Bsp: Sei $f \in C^1(U)$ und $X = \operatorname{grad} f$, dann ist:

$$\int_\gamma X(y) \cdot dy = \int_0^1 \langle X(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt = \int_0^1 \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^1 Df(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) \, dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \, dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

also: $\oint_\gamma X(y) \cdot dy = 0$ für eine geschl. Kurve.

Dieses Beispiel wirft die Frage auf, ob alle konservativen Vektorfelder X von der Form $X = \operatorname{grad} f$ sind. Die Antwort liefert der nächste Satz:

Satz 18.9: Für ein VF $X \in C(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. X ist konservativ
2. Es ex. $f \in C^1(U)$ mit $X = \operatorname{grad} f$
3. Für alle stückweise stetig diffbaren Kurven $\gamma : [0,1] \to U$ hängt $\int_\gamma X(y) \cdot dy$ nur von den Endpunkten ab.

Bew: 2. $\Rightarrow$ 1. Siehe obiges Bsp.

1. $\Rightarrow$ 3. Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ st. st. diffbare Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Wir betrachten

$$\gamma : [0,2] \to U, \ t \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \in [0,1] \\ \gamma_2(2-t) & \text{für } t \in [1,2] \end{cases}$$

Es ist $\gamma(0) = \gamma(2)$ und somit (wegen 1.):

$$0 = \int_\gamma X(y) \cdot dy = \int_{\gamma_1} X(y) \cdot dy - \int_{\gamma_2} X(y) \cdot dy$$

woraus 3. folgt.

3. $\Rightarrow$ 2. (nur Skizze) Wir nehmen unter Einschränkung der Allgemeinheit an, dass für bel. Punkte $x, x_0 \in U$ eine stückweise stetig diffbare Kurve $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$ existiert (sonst zerfällt U in Zusammenhangskomponenten: $U = \bigcup_j U_j$ und wir müssen für jedes U_j ein eigenes f_j konstruieren). Wir definieren nun:

$$f(x) := \int_{x_0}^{x} X(y) \cdot dy := \int_\gamma X(y) \cdot dy \quad , \quad x \in U$$

Wegen 3. ist f wohldefiniert, ist also nicht von γ abhängig, solange x und x_0 von γ verbunden werden. Für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\|$ klein gilt:

$$\frac{f(x+h) - f(x) - X(x) \cdot h}{\|h\|} = \frac{\int_x^{x+h} X(y) \cdot dy - X(y) \cdot h}{\|h\|}$$

$$= \frac{1}{\|h\|} \int_x^{x+h} \left(X(y) - X(x) \right) \cdot dy \leq \sup_{\|y-x\| \leq \|h\|} \|X(x) - X(y)\|$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{für } \|h\| \to 0 \quad \text{da } X \text{ stetig. } \square$$

<u>Bem:</u> Man nennt X mit $X = \operatorname{grad} f$ auch Gradientenfeld mit Potenzial f.