17 Extra mit Nebenbedingungen

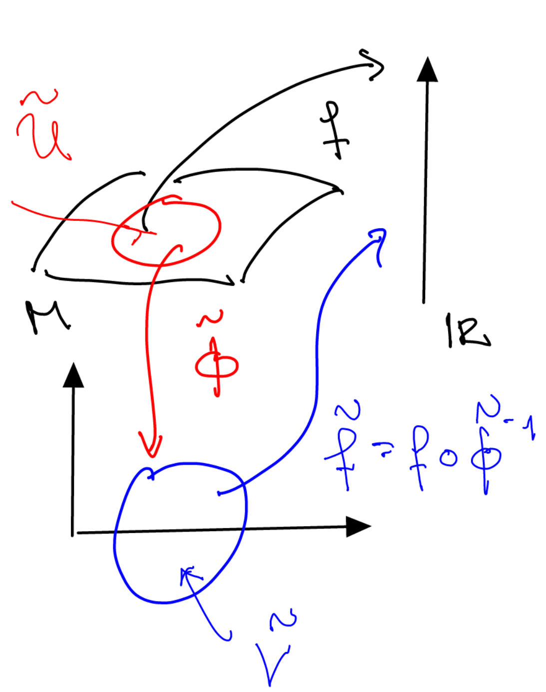
17.1 Generalisierte Koordinaten

Aufgabe: $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $M = \mathbb{R}^n$ Untermf. Finde globale und lokale Extrema von $f\restriction_M : M \to \mathbb{R}$.

lokales Extremum: $x \in M$ lok. Max. / Min von $f\restriction_M : M \to \mathbb{R}$
$\exists$ Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ von x mit $f(y) \leq f(x)$ bzw $f(y) \geq f(x)$
$\forall x \in \mathcal{U} \cap M$.

Notwendige Bedingung für $M \subset \mathbb{R}^n$ offen: $x_0 \in M$ lokales Extremum bei $x_0 \in M \Rightarrow Df(x_0) = 0$.
$\to$ Nicht anwendbar wenn M bel. Teilmenge und x_0 kein innerer Punkt.

Notwendige Bedingung für $M \subset \mathbb{R}^n$ Untermf: $x_0 \in M$ lok. Extremum $\Rightarrow \exists$ Karte $(\mathcal{U}, \phi)$ mit $x_0 \in \mathcal{U}$.
Wie im letzten Kapitel definieren wir:



$\tilde{\mathcal{U}} = M \cap \mathcal{U}$, $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ offen mit:

$\phi(\tilde{\mathcal{U}}) \cap \mathbb{R}^m \times \{0\} = \tilde{V} \times \{0\}$

$\tilde{\phi} : \tilde{\mathcal{U}} \to \tilde{V}$ mit $\tilde{\phi}^{-1}(q) = \phi(q, 0)$.

Ferner ist (da $\tilde{\phi}^{-1} : \tilde{V} \to \tilde{\mathcal{U}}$ C^1):

$\tilde{f} : \tilde{V} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto f(\tilde{\phi}^{-1}(q))$

ebenfalls C^1.

Nun ist offenbar: $x_0 \in \mathcal{U}$ lok. Extremum $\Rightarrow \exists\, \tilde{\mathcal{U}}_1 \subset \mathcal{U}$ off. Umgeb. von x_0 mit $f(x_0) \geq f(x)$ [oder $f(x_0) \leq f(x)$] $\forall x \in \mathcal{U}_1$. $\Rightarrow$

$$\tilde{f}(q_0) \geq f(q) \;\left[\text{od } \tilde{f}(q_0) \leq \tilde{f}(q)\right] \;\forall q \in V_1 = \tilde{\phi}(\mathcal{U}_1)$$

mit $q_0 = \tilde{\phi}(x_0)$. $V_1 \subset \tilde{V}$ ist offen (warum? Übung!) und daher eine off. Umgeb von q_0. Daher ist $q_0 = \tilde{\phi}(x_0)$ ein lok. Extremum von $\tilde{f} \Rightarrow D\tilde{f}(q_0) = 0 \quad \Rightarrow$

$$0 = D\tilde{f}(q_0)\cdot h = D(f \circ \tilde{\phi})(q_0)\cdot h = Df(x_0)\, D\tilde{\phi}(q_0)\cdot h \quad \forall h \in \mathbb{R}^m$$

Nun ist aber:

$$v \in T_{x_0} M \iff \exists\, h \in \mathbb{R}^m : \; v = D\tilde{\phi}(q_0)\cdot h$$

Und daher:

> **Satz 17.1:** $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $M \subset \mathbb{R}^n$ Untermf., $x_0 \in M$ lok. Extremum von $f\restriction_M : M \to \mathbb{R} \Rightarrow$
>
> $$Df(x_0)\cdot v = 0 \qquad \forall v \in T_{x_0} M$$

Bsp: $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $\quad M = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$.

$\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$, $\tilde{\mathcal{U}} = S^1 \cap \mathcal{U}$, $\tilde{V} = (0, 2\pi)$

$\tilde{\phi} : \tilde{\mathcal{U}} \to \tilde{V}$, $\alpha \mapsto \tilde{\phi}^{-1}(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha) \quad \Rightarrow$

$$T_{\tilde{\phi}^{-1}(\alpha)} M = \mathbb{R}\, k_\alpha \; ; \qquad k_\alpha = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$$

$$Df(\tilde{\phi}^{-1}(\alpha))\cdot h = x_2 h_1 + x_1 h_2 = \sin\alpha\, h_1 + \cos\alpha\, h_2$$

mit $h = k_\alpha$:

$$Df(\tilde{\phi}^{-1}(\alpha))\cdot k_\alpha = -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Aus $Df(x_0)\cdot k_\alpha = 0$ folgt also:

$$0 = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ mögliche Extrema bei $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}, \pi \pm \frac{\pi}{4}$ bzw:

$$x_{\pm,\pm} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad f(x_{++}) = f(x_{--}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{max}$$

$$f(x_{+-}) = f(-+) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{min}$$

Wegen der Kompaktheit von $M = S^1$ ex. glob. Max./Min und werden von f angenommen (f stetig). Also sind die glob. Extrema sogar lokale Extrema.