# 16.5 Riemannsche Metrik

**Def 16.9:** $M \subset \mathbb{R}^n$ $m$-dim Untermf von $\mathbb{R}^n$. Dann heißt die bilineare Abbildung:

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \; (v,w) \mapsto g_p(v,w) = \langle v, w \rangle$$

Skprod. im $\mathbb{R}^n$

der (riemannsche), metrische Tensor von $M$ bei $p$.

**Bem:** Sei $(U,\phi)$ eine Karte, $k_j(p)$, $j=1,..,m$ die Koordinatenvektoren, dann sind:

$$(g_p)_{jl} := g_p(k_j(p), k_l(p)) = \langle k_j(p), k_l(p) \rangle \quad (*)$$

die Komponenten von $g_p$. Offenbar ist $g_p$ durch Angabe der Matrix $(g_p)_{jl}$ eindeutig bestimmt.

**Bsp:** $S^2$ + Polarkoordinaten. $p \in S^2 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0 \wedge x_1 \geq 0\}$

Die Koordinatenvektoren waren (Abschnitt 16.4):

$$k_\phi = \begin{bmatrix} -\sin\vartheta \sin\phi \\ \sin\vartheta \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos\vartheta \cos\phi \\ \cos\vartheta \sin\phi \\ -\sin\vartheta \end{bmatrix}$$

Auswertung des Skalarproduktes in $(*)$ liefert:

$$(g_p)_{jl} = \begin{bmatrix} \sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bsp 2: $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0 \wedge x_1 > 0\}$ ist offen und damit eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ die mit der Karte $(U, \phi)$, $U = M$, $\phi$ = Polarkoordinaten überdeckt werden kann. Die Tangentialräume sind alle identisch:

$$T_pM = \mathbb{R}^3 \quad \forall p \in M$$

trotzdem sind die Koordinatenvektoren bzgl. der Karte $(U, \phi)$ von $p$ abhängig. Wir erhalten ähnlich wie in Bsp 1:

$$k_\varphi(r, \vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} -r \sin\vartheta \sin\phi \\ r \sin\vartheta \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_\vartheta(r, \vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} r \cos\vartheta \cos\phi \\ r \cos\vartheta \sin\phi \\ -r \sin\vartheta \end{bmatrix}$$

$$k_r(r, \vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Da $T_pM = \mathbb{R}^3$ ist der metrische Tensor $g_p$ überall gleich dem Standardskalarprodukt. Die Komponenten $(g_p)_{j\ell}$ aber hängen (wie die $k_j(p)$) von $p$ ab:

$$g_{j\ell} = \begin{bmatrix} r^2 \sin^2\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir können dies benutzen um für $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ den Gradienten $\nabla f(p)$ in Kugelkoordinaten auszurechnen:

$$\nabla f(p) = \sum \big(\nabla f(p)\big)_j k_j(p), \quad \big(\nabla f(p)\big)_j \in \mathbb{R}$$

$$\langle \nabla f(p), k_e(p)\rangle = \sum_j \langle \nabla f(p)_j k_j(p), k_e(p)\rangle = \sum_j (\nabla f(p))_j g_{je}$$

Bezeichnen wir die zu $(g_{je})_{je}$ inverse Matrix mit $(g^{ab})_{ab}$ dann ist:

$$(\nabla f(p))_a = \sum_{e,j} g^{ae} g_{je} (\nabla f(p))_j = \sum_e g^{ae} \langle \nabla f(p), k_e(p)\rangle$$

Ferner:

$$\langle \nabla f(p), k_e(p)\rangle = Df(p)\cdot k_e(p) = Df(p)\cdot D\phi^{-1}(\phi(p))\cdot e_e$$

$$= D(f\circ\phi^{-1})(\phi(p))\cdot e_e = \partial_e(f\circ\phi^{-1})(\phi(p))$$

$$\Rightarrow \nabla f(p) = \sum_e g^{ea} \partial_e (f\circ\phi^{-1})(\phi(p))\, k_a(p)$$

Für Kugelkoordinaten also:

$$\nabla f(p) = \frac{\partial f}{\partial r}(p)\, k_r(p) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}(p)\, k_\vartheta(p) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}(p)\, k_\varphi(p)$$

mit den Abkürzungen: $(r,\vartheta,\varphi) = \phi(p)$ und

$$\frac{\partial f}{\partial r}(p) = \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial r}(r,\vartheta,\varphi), \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(p) = \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial \varphi}(r,\vartheta,\varphi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta}(p) = \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial \vartheta}(r,\vartheta,\phi)$$

Verwenden wir statt $k_r, k_\vartheta, k_\varphi$ die normierten Koordinatenvektoren.

$$e_r = \frac{k_r}{\|k_r\|} = k_r,\; e_\vartheta = \frac{k_\vartheta}{\|k_\vartheta\|} = \frac{k_\vartheta}{r},\; e_\varphi = \frac{k_\varphi}{r\sin\vartheta}$$

$$\nabla f(p) = \frac{\partial f}{\partial r}(p)\, e_r(p) + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}(p)\, e_\vartheta(p) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}(p)\, e_\varphi(p)$$