15 Implizite Funktionen

15.1 Motivation

Problemstellung. $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, offen $f: U \times V \to \mathbb{R}^\ell$, $c \in \mathbb{R}^\ell$. Finde $g: U \to V$, so dass $f(x, g(x)) = c \ \forall x \in U$.

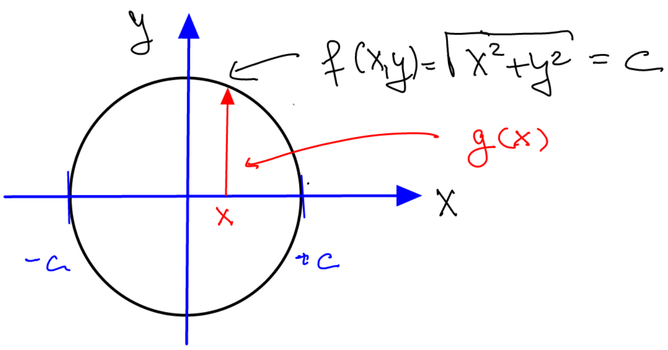
- Mit anderen Worten: Wir wollen die Niveaufläche

$$N_c := \{ (x,y) \in U \times V \mid f(x,y) = c \}$$

(lokal) so parametrisieren, dass N_c der Graph der Abb. g wird.

- Andere Interpretation: Wir suchen eine Abb. $g: U_1 \to U_2$ die implizit durch die Gleichung $f(x, g(x)) = c$ gegeben ist (daher „implizite Fkt.“.)

Bsp 1: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$. $c > 0 \Rightarrow N_c =$ Kreislinie im $\mathbb{R}^2$ mit Radius c. Gesucht: $g: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall mit $\sqrt{x^2 + g(x)^2} = c$.



Für $I = (-c, c)$ sind

$$g_\pm(x) = \pm \sqrt{c^2 - x^2}$$

für $x \notin \overline{I}$ gibt es jedoch keine reellen Lösungen.

Dies zeigt, dass obige Problemstellung nur mit zusätzlichen Annahmen (eindeutig) lösbar sein kann.

<u>Bsp 2:</u> Wie diese Annahmen aussehen könnten zeigt ein weiteres Bsp.: $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $(x,y) \mapsto Ax + By$. Die Niveauflächen N_c, $c \in \mathbb{R}^m$ sind Hyperflächen im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Für invertierbares B definieren wir:

$$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto B^{-1}(c - Ax).$$

Offenbar ist:

$$f(x, g(x)) = Ax + BB^{-1}(c - Ax) = Ax + c - Ax = c.$$

Damit ist g die gesuchte Abb. Man beachte, dass

$$B = Df_x(y) \quad \text{mit } f_x: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \; y \mapsto f_x(y) = f(x,y)$$

gilt.

<u>Bem:</u> Die Bedingung „$Df_y(x)$ invertierbar" garantiert in Bsp 2 die Existenz der impliziten Fkt. g. Dies werden wir im nächsten Abschnitt verallgemeinern.