14. Taylorsche Formel und Extremalwerte

14.1 Taylorsche Formel

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^{k+1}(U)$, und $x_0, x \in U$ Punkte deren Verbindungsstrecke ganz in U liegt. Wir definieren

$$F : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t) := f(x_0 + th), \quad h := x - x_0$$

F ist in $C^{k+1}([0,1])$ und hat daher die Taylorentwicklung:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(0) + \dots + \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) + R_{k+1}(0,1)$$

mit Restglied (nach Lagrange):

$$R_{k+1}(0,1) = \frac{F^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \quad \text{für ein } \xi \in [0,1]$$

Die Ableitungen von f ergeben sich wie:

$$F'(t) = Df(x_0+th) \cdot h = \partial_h f(x_0 + t \cdot h)$$

$$F''(t) = \partial_h \partial_h f(x_0 + th) = D^2 f(x_0+th)[h,h]$$

$$\vdots \qquad\qquad = D^2 f(x_0+th)\, h^2$$

$$F^{(k)}(t) = D^k f(x_0+th)\, h^k$$

Wir setzen nun noch: $D^0 f(x_0) \cdot h^0 = f(x_0)$ und erhalten:

Def 14.1: Sei $f \in C^k(U)$, dann heißt:

$$T_k f(x, x_0) := \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D^j f(x_0) \cdot (x - x_0)^j$$

das k-te Taylorpolynom von f.

Satz 14.2: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{k+1}(U)$, $x_0, x \in U$ so dass die Verbindungsstrecke ganz in U liegt, dann gilt:

$$f(x) = T_k(x, x_0) + R_{k+1}(x, x_0)$$

wobei das Restglied mit einem geeigneten $\xi = \lambda x_0 + (1-\lambda)x$, $\lambda \in [0,1]$ geschrieben werden kann als:

$$R_{k+1}(x, x_0) = \frac{D^{k+1} f(\xi)(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Bew: siehe oben. □

Kor 14.3: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f \in C^k(U)$, dann gilt für jedes $x_0 \in U$ und $x \to x_0$:

$$f(x) = T_k f(x, x_0) + o(\|x - x_0\|^k)$$

Bew: Übung. siehe Königsberger. □

Ähnlich wie in einer Dimension können wir nun Taylorreihen definieren.

Def 14.4 $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f \in C^\infty(U)$. Die Reihe

$$Tf(x, x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f(x_0)(x-x_0)^k$$

heißt Taylorreihe von f in $x_0 \in U$. f heißt reell-analytisch wenn jedes $x_0 \in U$ eine Umgebung $x_0 \in V \subset U$ besitzt, so dass $Tf(x, x_0) = f(x)$ $\forall x \in V$ gilt.