13.3 Der Gradient

Def 13.7: Der Vektor der partiellen Ableitungen von $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

$$\nabla f(x) := \operatorname{grad} f(x) := (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$$

heißt der **Gradient** von f.

__Bem:__ Die Unterscheidung zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n*}$ ist etwas akademisch, da es zu jedem $\varphi \in \mathbb{R}^{n*}$ genau ein $v_\varphi \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\varphi \cdot y = \langle v_\varphi, y \rangle$ ist. Dabei ist die Abb. $\mathbb{R}^{n*} \ni \varphi \mapsto v_\varphi \in \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus. Wenden wir diesen Isomorphismus auf $d_x f$ an erhalten wir:

$$d_x f \cdot v = \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Mit anderen Worten: $\operatorname{grad} f(x)$ ist der zur Linearform $d_x f$ äquivalente Vektor.

__Bem:__ $\operatorname{grad} f$ ist eine Abb. $\operatorname{grad} f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ also ein Vektorfeld. Phys. Bsp. konservatives Kraftfeld $-\operatorname{grad} V$ mit Potential $V: U \to \mathbb{R}$.

__Bem:__ Wir betrachten die Richtungsableitung von $f: U \to \mathbb{R}$ in Richtung $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{d}{dt} f(x+th)\Big|_{t=0} = d_x f \cdot h = \langle \operatorname{grad} f(x), h \rangle = \|\operatorname{grad} f(x)\| \, \|h\| \cos\varphi$$

Wobei φ der von $\operatorname{grad} f(x)$ und h eingeschlossene Winkel ist. Dies zeigt:

1. Die Länge $\|\operatorname{grad} f(x)\|$ ist das Maximum aller Richtungsableitungen nach den Einheitsvektoren:

$$\|\operatorname{grad} f(x)\| = \max\{\partial_h f(x) \mid \|h\| = 1\} =: M$$

2. Für $M \neq 0$ gibt es genau einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\partial_v f(x) = M$ und mit diesem ist $\operatorname{grad} f(x) = v M$.

Der Gradient zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f bei $x \in U$.

<u>Bsp:</u> $F: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt auf einem Intervall $I \subset [0, \infty)$

Wir definieren auf der Kugelschale

$$K(I) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \in I\}$$

eine Funktion f durch:

$$f: K(I) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := F(\|x\|).$$

Ist I offen und F stetig diffbar, dann ist auch f stetig diffbar und

$$\partial_k f(x) = F'(\|x\|) \cdot \frac{x_k}{\|x\|}, \qquad k = 1, \dots, n$$

$$\operatorname{grad} f(x) = F'(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|}$$