11.4 Begleitendes Dreibein, Krümmung.

Def 11.9: $x: I \to \mathbb{R}^3$ durch Bogenlänge param. C^2-Kurve. Für $\|\ddot{x}(s)\| > 0$ heißt:

$$\tau(s) := \dot{x}(s) \quad \text{Tangentialvektor}$$

$$n(s) := \frac{\dot{\tau}(s)}{\|\dot{\tau}(s)\|} \quad \text{Hauptnormalenvektor}$$

$$b(s) := \tau(s) \times n(s) \quad \text{Binormalenvektor}$$

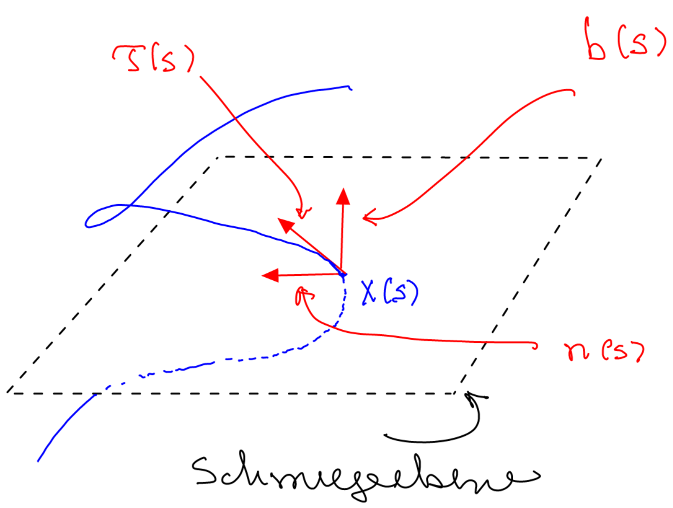
Bem: Die Vektoren $\tau(s)$, $n(s)$ stehen paarweise senkrecht aufeinander:

Bogenlängen-Param.

$$0 = \frac{d}{ds} 1 = \frac{d}{ds} \|\tau(s)\|^2 = \frac{d}{ds} \langle \tau(s), \tau(s) \rangle =$$

$$= 2 \langle \tau(s), \dot{\tau}(s) \rangle \Rightarrow n(s) \perp \tau(s)$$

$b(s) \perp n(s)$ und $b(s) \perp \tau(s)$ folgt aus den Eigenschaften des $\times$-Produktes. Die drei Einheitsvektoren $\{\tau(s), n(s), b(s)\}$ heißen begleitendes Dreibein.

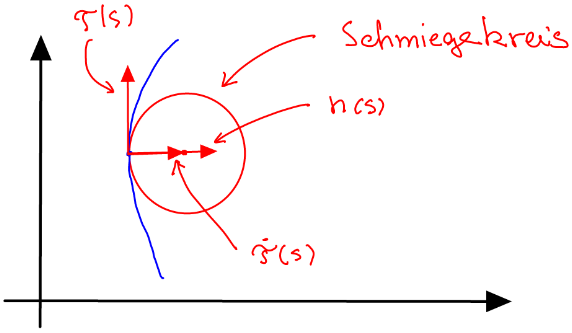


Bem: $\tau(s)$, $n(s)$ spannen die Schmiegebene auf. Die Kurve x ist im Pkt. $x(s)$ tangential an diese Ebene.

Def 11.10: Sei $x: I \to \mathbb{R}^3$ wie oben C^2 und Bogenlängen-parametrisiert mit $\|\ddot{x}(s)\| > 0$, dann heißt

$$\varkappa(s) := \|\dot{\tau}(s)\|$$

Die **Krümmung** von x im Punkt $x(s)$.



Bem: Der Kreis in der Schmiegebene mit Radius $\varkappa(s)^{-1}$ und Mittelpunkt

$$m(s) = x(s) + \varkappa^{-1}(s)\, n(s)$$

liegt im Pkt. $x(s)$ tangential an die Kurve x. Er heißt **Schmiegekreis**.

Bem: Liegt die Kurve nicht in Bogenlängenparam. vor, berechnet sich das begleitende Dreibein wie folgt (Übung):

$$\tau(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} \; ; \qquad n(t) = b(t) \times \tau(t)$$

$$b(t) = \frac{\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)}{\|\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)\|} \, , \qquad \varkappa(t) = \frac{\|\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)\|}{\|\dot{x}(t)\|^3}$$