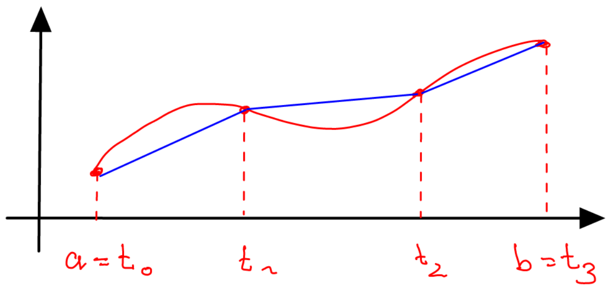
## 11.2 Bogenlänge

**Bem:** $x: I \to \mathbb{R}^n$ stetige Kurve. Jede endliche Menge $Z$ von Teilungspunkten $t_0, t_1, \ldots, t_m \in I$ mit

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_m$$




Einbeschriebenes Sehnenpolygon.

definiert ein Sehnenpolygon mit den Eckpunkten $x(t_0), \ldots, x(t_m)$ und der Länge:

$$L(Z) = \sum_{i=1}^{m} \| x(t_i) - x(t_{i-1}) \|_2$$

**Beobachtung:** Verfeinerung $\tilde{Z}$ der Zerlegung $Z$ (also $Z \subsetneq \tilde{Z} \subset I$) verlängert den zugehörigen Polygonzug. Also: $L(Z) < L(\tilde{Z})$.

**Idee:** Länge von $x$ = Länge des Polygonzuges im Limes $|t_j - t_{j-1}| \to 0$. Wegen obiger Beobachtung ist das aber das Supremum über alle $L(Z)$.

**Def 11.3:** Eine stetige Kurve $x: I \to \mathbb{R}^n$ heißt rektifizierbar wenn $\{L(Z) \mid Z \text{ einbeschr. Sehnenpolyg.}\}$ beschränkt ist. Das Supremum dieser Längen heißt Länge von $x$.

$$L(x) = \sup_Z L(Z)$$

Bem: Wir schreiben $L(Z)$ als:

$$L(Z) = \sum_{j=1}^{m} \left\| \frac{x(t_j) - x(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right\|_2 \quad (t_j - t_{j-1}) \qquad (*)$$

im Limes $t_j - t_{j-1} \to 0$ passieren nun zwei Dinge:

$$\frac{x(t_j) - x(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \longrightarrow \dot{x}(t), \quad t_j - t_{j-1} \to 0, \; t \in (t_{j-1}, t_j)$$

und die Summe in $(*)$ – offenbar eine riemannsche Summe – wird zum Integral. Eine exakte Umsetzung dieser Idee (die wir hier überspringen – siehe z.B. Königsberger 12.2 Satz 2) erhalten wir:

**Satz 11.4:** Eine stetig diffbare Kurve auf einem kompakten Intervall $I$ ist rektifizierbar mit:

$$L(x) = \int_{\inf I}^{\sup I} \| \dot{x}(t) \| \, dt$$

Bew: siehe oben □

Bsp: Länge eines Kreisbogens. $\alpha \in (0, 2\pi]$, $r > 0$.

$$x : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2, \; t \mapsto (r \cos t, r \sin t).$$

$$L(x) = \int_0^{\alpha} \sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t} \, dt$$

$$= \int_0^{\alpha} r \, dt = r\alpha$$

Damit erhält jetzt der Winkel $\alpha$ seine Bedeutung als Länge des zugehörigen Segments auf dem Einheitskreis. Insbesondere ist in

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

$\alpha$ nun wirklich der Winkel zwischen $z = e^{i\alpha}$ und der reellen Achse (im Sinne obiger Bogenlängen-Definition). Diese Bestätigung fehlte bisher – obgleich wir $e^{i\alpha}$ schon in diesem Sinne benutzt haben. Ebenso erkennen wir, dass der Umfang des Einheitskreises $2\pi$ ist. Zur Erinnerung: $\pi$ war über die Nullstellen des Cosinus definiert (Satz 4.22).