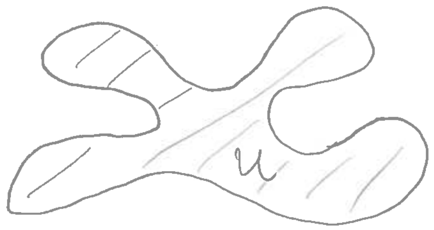
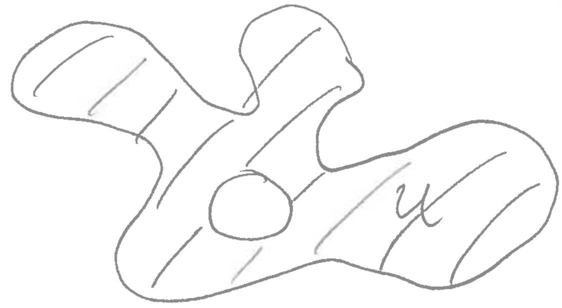
$\gamma: [0,1] \to U$ mit $\gamma(0)=\gamma(1)$ ist stetig in $U$ auf Pkt. zusammenziehbar:




einfach zusammenhängend




nicht einfach zusammenhängend.

2. **Relevanz für Physik:** (Spezialfall $n=3$)

Das Lemma von Poincaré sichert die **Existenz von Potentialen für wirbelfreie Kraftfelder**. Z.B. Elektrostatik:

Elektrisches Feld $E: U \to \mathbb{R}^3$: $\quad \operatorname{rot} E = 0 \quad$ (Maxwell)

$\iff \exists$ Elektr. Potential $\varphi: U \to \mathbb{R}$: $\quad E = -\nabla\varphi$

(Vorsicht: andere Vorzeichenkonvention!)

Die folgende Variante des Lemma von Poincaré sichert auch die **Existenz von Vektorpotentialen für quellenfreie Kraftfelder**. Z.B. Magnetostatik

**Satz** (Existenz von Potential & Vektorpotential)

$v \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, sternförmig.

1. $\nabla \times v = 0 \iff \exists f \in \mathcal{C}^2(U) : v = \nabla f$

2. $\nabla \cdot v = 0 \iff \exists w \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^3) : v = \nabla \times w$

Beweis: 1. Lemma von Poincaré für $n = 3$.

2. Übung $\square$

Eichfreiheit: 1. Skalare Potentiale sind nur bis auf additive Konstante eindeutig bestimmt: $\nabla f = \nabla (f + \text{const})$

2. Vektorpotentiale sind nur bis auf additives Gradientenfeld eindeutig bestimmt:

$$\nabla \times w = \nabla \times (w + \nabla f)$$

Zum Beweis des Lemmas von Poincaré benötigen wir folgenden Satz über parameterabhängige Integrale.

**Satz** (Differenzierbarkeit parameterabh. Integrale)

Für $f \in \mathcal{C}(U \times [a,b])$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a<b$ und

1. $x \mapsto f(x,t)$ ist für alle $t \in [a,b]$ partiell diff.bar
2. $(x,t) \mapsto \partial_j f(x,t)$ ist stetig auf $U \times [a,b]$ für alle $j \in \{1,..,n\}$

ist die Funktion $F: U \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt$ stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_j F(x) = \int_a^b \partial_j f(x,t)\,dt \qquad j \in \{1,..,n\}$$

## Beweis des Lemma von Poincaré 1. ⇒ 2.

Wähle $x_0 \in U$ ausgezeichneten Pkt und setze

$$\boxed{f(x) := \int_0^1 v(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x-x_0)\,dt \quad , \quad x \in U}$$

Dann gilt für alle $j \in \{1,..,n\}$:

$$\partial_j f(x) \underset{\uparrow \text{Satz}}{=} \int_0^1 \partial_j \Big( v(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x-x_0) \Big)\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prod.- \& Ketten-} \\ \text{regel}}}{=} \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left[ (\partial_j v_k)(x_0 + t(x-x_0))(x_k - x_{0,k})t + v_k(x_0+t(x-x_0))\delta_{jk} \right] dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \partial_j v_k = \partial_k v_j}}{=} \int_0^1 \left[ \sum_{k=1}^n (\partial_k v_j)(x_0 + t(x-x_0))(x_k - x_{0,k})t + v_j(x_0+t(x-x_0)) \right] dt = (*)$$

Benutze: $\frac{d}{dt}\left[ t v_j(x_0+t(x-x_0)) \right] \overset{\substack{\text{Produktregel} \\ \downarrow}}{=} v_j(x_0+t(x-x_0)) + t \frac{d}{dt} v_j(x_0+t(x-x_0))$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} v_j(x_0+t(x-x_0)) + t \sum_{k=1}^n (\partial_k v_j)(x_0+t(x-x_0))(x_k - x_{0,k})$$

Somit: $(*) = \left[ t\, v_j(x_0+t(x-x_0)) \right]_0^1 = v_j(x)$ $\square$

<u>Bemerkung:</u> Analog beweist man, daß für $\nabla \cdot v = 0$ und

$$\boxed{w(x) := \int_0^1 v(x_0+t(x-x_0)) \times (x-x_0)t\, dt, \quad x \in U}$$

gilt: $\nabla \times w(x) = v(x), \quad x \in U$ (Übung!)

Beweis des Satzes S. 112: o.B.d.A $n=1$

Differentialquotient für $x, x' \in U$ mit $x \neq x'$:

$$D(x,x') := \frac{F(x)-F(x')}{x-x'} = \int_a^b \frac{f(x,t)-f(x',t)}{x-x'}\,dt$$

- Mittelwertsatz: $\exists\ x(t) \in [\min(x,x'), \max(x,x')]$:

$$D(x,x') = \int_a^b \partial_1 f(x(t),t)\,dt \qquad (*)$$

- Aus 2. folgt, daß $K \times [a,b] \ni (x,t) \mapsto (\partial_1 f)(x,t)$ für alle Kompakten $K \subset U$ sogar gleichmäßig stetig ist, d.h.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \ \forall\ (x,t), (x',t') \in K \times [a,b]$:

$$|(x,t)-(x',t')| < \delta \Rightarrow |(\partial_1 f)(x,t) - (\partial_1 f)(x',t')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Somit: $\left| D(x,x') - \int_a^b \partial_1 f(x,t)\,dt \right|$

$$\underset{(*)+\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \int_a^b |\partial_1 f(x(t),t) - \partial_1 f(x,t)|\,dt < \varepsilon$$

Fazit: $\lim_{x' \to x} D(x,x') = \int_a^b (\partial_1 f)(x,t)\,dt$ $\square$

# 19 Banachscher Fixpunktsatz

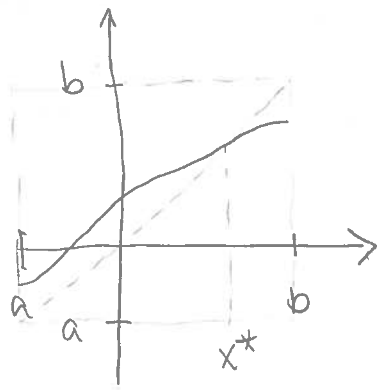
## 19.1 Kontraktionen & Fixpunkte

Erinnerung: Abb. $f: X \to Y$ zw. metrischen Räumen $(X, d_X), (Y, d_Y)$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante $L$, falls $\forall x, x' \in X: d_Y(f(x), f(x')) \le L\, d_X(x, x')$.

**Def:** Lipschitz-stetige Abbildungen mit Konstante $L \in (0,1)$ heißen Kontraktionen.

Bsp: $f: [a,b] \to [a,b]$ (mit Eukl. Metrik) mit $\sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| < 1$

$$|f(x) - f(x')| \le \int_{\min(x,x')}^{\max(x,x')} |f'(\xi)|\, d\xi \le \sup_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)|\, |x - x'|$$




**Def:** Für Abb. $f: X \to X$ heißt $x^* \in X$ Fixpunkt, falls $f(x^*) = x^*$.

In obigem Beispiel gibt es genau einen Fixpunkt $x^* \in [a,b]$ von $f$. Dies gilt allgemeiner:

**Satz** (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei $f: X \to X$ Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum $(X,d)$. Dann gilt:

1. $f$ besitzt genau einen Fixpunkt $x^* \in X$.
2. Für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die durch $x_{k+1} := f(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ definierte Iterationsfolge gegen $x^*$. Es gilt die Fehlerabschätzung: $d(x_k, x^*) \leq \frac{L}{1-L} d(x_k, x_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$, wobei $L \in [0,1)$ Lipschitz-Konstante von $f$.

Beweis: Iterationsfolge $(x_k)$ erfüllt:

i) $d(x_{k+1}, x_k) \leq L\, d(x_k, x_{k-1}) \leq \ldots \leq L^k d(x_1, x_0)$ $\quad k \in \mathbb{N}$.

ii) $d(x_{k+m}, x_k) \leq d(x_{k+m}, x_{k+m-1}) + \ldots + d(x_{k+1}, x_k)$ $\quad k, m \in \mathbb{N}$

$$\underset{i)}{\leq} (L^{k+m-1} + \ldots + L^k)\, d(x_1, x_0) \underset{\text{geom. Reihe}}{\leq} \frac{L^k}{1-L} d(x_1, x_0)$$

Aus ii) folgt, daß $(x_k)$ Cauchy Folge ist. Da $(X,d)$ vollständig, gibt es: $x^* = \lim_{k\to\infty} x_k \in X$.

Aus Stetigkeit von $f$ folgt: $f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x^*$, d.h. $x^*$ ist Fixpunkt von $f$.

Der Beweis der Fehlerabschätzung wird als Übung überlassen.

Beweis der Eindeutigkeit des Fixpunkts $x^* \in X$:

Sei $x \in X$ weiterer Fixpunkt, dann gilt:

$d(x, x^*) = d(f(x), f(x^*)) \leq L\, d(x, x^*)$

Da $L \in (0,1)$, folgt $d(x, x^*) = 0$ und somit $x = x^*$ □

## 19.2. Anwendungen

Banachscher Fixpunktsatz findet Anwendung:

1. Beweis des Satzes über implizite Fkt / Umkehrfunktion
2. Beweis der Existenz & Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen (vgl. Kap. 20)
3. Existenz & Bestimmung von Nullstellen (Numerisches Verfahren nach Newton)

**Satz** (Vereinfachtes Newtonverfahren)

Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $x_0 \in \mathcal{U}$, $r > 0$ mit $\overline{U_r(x_0)} \subset \mathcal{U}$ und $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ invertierbar, so daß

1. $\| A^{-1} Df(x) - 1 \| \leq \frac{1}{2}$ für alle $x \in \overline{U_r(x_0)}$
2. $\| A^{-1} f(x_0) \| \leq \frac{r}{2}$.

Dann konvergiert die Iterationsfolge $x_{k+1} = F(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ mit $F : \overline{U_r(x_0)} \to \mathbb{R}^n$, $F(x) := x - A^{-1} f(x)$ gegen die einzige Nullstelle $x^*$ von $f$ in $\overline{U_r(x_0)}$.

Beweis: • $F$ ist eine Kontraktion, da:

$$\| DF(x) \| = \| 1 - A^{-1} Df(x) \| \leq \frac{1}{2} < 1$$

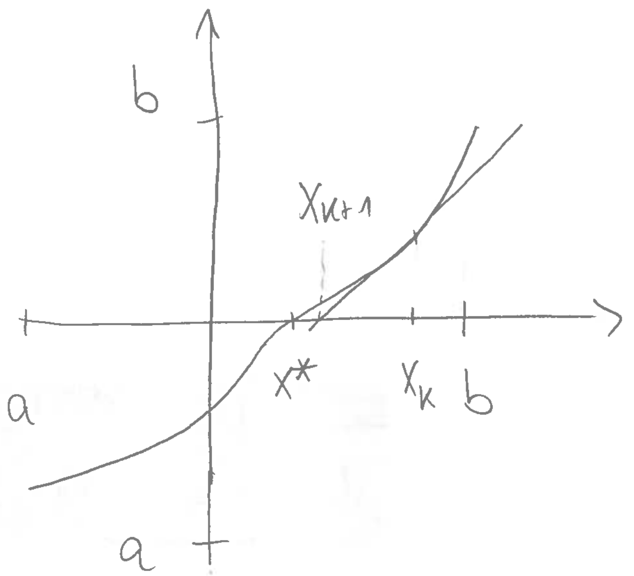
• Es gilt: $F(\overline{U_r(x_0)}) \subset \overline{U_r(x_0)}$, da für $x \in \overline{U_r(x_0)}$

$$\begin{aligned} |F(x) - x_0| &\leq |F(x) - F(x_0)| + |F(x_0) - x_0| \\ &\leq \frac{1}{2} |x - x_0| + \| A^{-1} f(x_0) \| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \leq r. \end{aligned}$$

Die Beh. folgt somit aus Banachschen Fixpunktsatz. $\square$

# Vergleich mit Newton-Verfahren für $n = 1$

Sei $f \in C^2([a,b], \mathbb{R})$ mit $f'(x) \neq 0$ und Nullstelle $x^* \in [a,b]$, d.h. $f(x^*) = 0$




Newton Iteration: $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Man kann zeigen: $|x_{k+1} - x^*| \leq M \, |x_k - x^*|^2$

$$\text{mit } M := \frac{\max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|}{\min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|}$$

d.h. quadratische Konvergenz von $(x_k)$ zu $x^*$.

# 20 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichung (DGL):

Gleichung, in der Ableitungen einer oder mehrerer Fkten auftreten. Für Fkten einer Variablen heißt DGL *gewöhnlich*, sonst *partiell*. Werden mehrere Fkten gesucht spricht man von einem *DGLssystem*, sonst von Einzel-DGL.

## 20.1. Definitionen & Beispiele

**Def:** Eine *gewöhnliche DGL n-ter Ordnung* ist eine Gleichung der Form

$$\boxed{f(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \ldots, x^{(1)}(t), x(t), t) = 0 \quad \forall t \in I} \quad (*)$$

wobei eine Fkt $x: I \to \mathbb{R}^m$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gesucht wird. Den Spezialfall

$$\boxed{x^{(n)}(t) = F(x^{(n-1)}(t), \ldots, x(t), t) \quad \forall t \in I}$$

nennt man *explizite DGL*; sonst *implizite DGL*.

Für $m \geq 2$ spricht man von einem *System von DGL's*.

Eine Kurve $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}^n)$ heißt (explizite) *Lösung*, wenn $(*)$ gilt.

**Beispiele:** 1. Lineare DGL's aus Kap. 10, z.B.

a) Radioaktiver Zerfall mit $c > 0$: $\quad x: I \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\dot{x}(t) = -c\,x(t)}$$

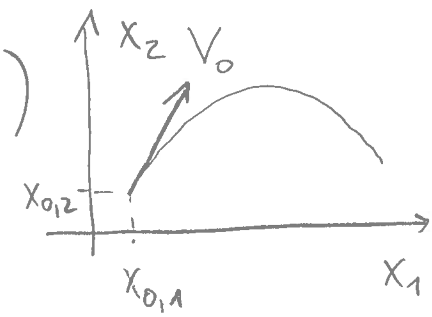
(1. Ordnung)

Lösung zum Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}$: $\quad x(t) = x_0 e^{-ct}$

b) Wurf im Schwerefeld $g > 0$: $\quad x: I \to \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\ddot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}}$$

(System 2. Ordnung)




Lösung zum Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^2$
und Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \in \mathbb{R}^2$: $\quad x(t) = x_0 + v_0 t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix}$

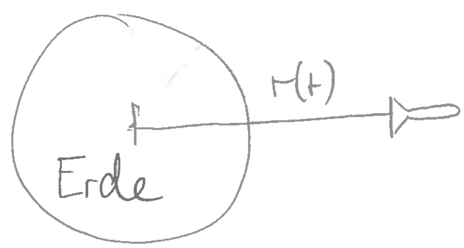
c) Allgemeines lin. DGL-System 1. Ordnung

$$\boxed{\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + b(t)}$$

$A(t) \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{R})$, $b(t) \in \mathbb{R}^m$

2. Raketengleichung: $\quad r: I \to (0, \infty)$, $\quad \alpha > 0$

$$\boxed{\ddot{r}(t) = -\frac{\alpha}{r(t)^2}}$$




(2. Ordnung)

3. Kreisgleichung: $\boxed{\dot{x}(t)\, x(t) + t = 0}$ $\quad x: I \to \mathbb{R}$

- Implizite DGL 1. Ordnung
- Für $x(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ äquivalent zur expliziten DGL:

$$\dot{x}(t) = -\frac{t}{x(t)}$$

- Lösung erfüllt: $\boxed{x(t)^2 + t^2 = c \geq 0}$

implizite Form der Lösung
explizite — für $|t| \leq \sqrt{c}$: $x(t) = \pm\sqrt{c - t^2}$.

Ergänzungen zum Lösungsbegriff:

Def: 1. Erfüllt eine Lösung einer DGL $n$ter Ordnung die Bedingungen: $\boxed{x^{(n-1)}(t_0) = v_{n-1}, \dots, x^{(1)}(t_0) = v_0,\ x(t_0) = x_0}$ spricht man von der Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems (AWP) bei $t = t_0$.

2. Eine von $n \cdot m$ reellen Parametern abhängige Lösung eines DGL-Systems $n$ter Ordnung heißt allgemeine Lösung.