18 Grundzüge der klassischen Vektoranalysis

18.1. Gradient, Divergenz, Rotation

Def. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v: U \to \mathbb{R}^n$ diff.bares Vektorfeld.
Dann heißt $\operatorname{div} v : U \to \mathbb{R}$, $\operatorname{div} v(x) := \sum_{j=1}^{n} \partial_j v_j(x)$
die Divergenz von v. (Schreibweise: $\operatorname{div} v = \nabla \cdot v$)

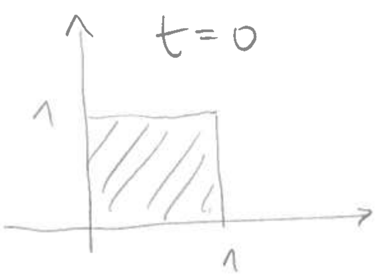
Interpretation der Divergenz als Quellstärke von v:

Betrachte Vektorfeld $v(x) = Ax$, $A = A^T \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})$ und dessen lineare DGL $\dot{x}(t) = v(x(t))$.

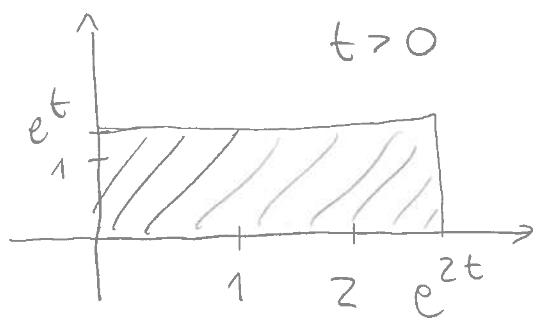
i) $\operatorname{div} v(x) = \sum_j A_{jj} = \operatorname{Sp} A = \begin{cases} \text{Summe der Eigenwerte von } A \\ \text{(gezählt mit Multiplizität)} \end{cases}$

ii) Volumenänderung des Kubus $[0,1]^n$ unter Lösungsfluss der DGL:

$$\left.\begin{matrix}\text{Volumen zum} \\ \text{Zeitpunkt } t\end{matrix}\right\} = \det\left(e^{tA} e_1 \dots e^{tA} e_n\right) = \det\left(e^{tA}\right)$$



z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$



Erinnerung an lineare Algebra (Übung):

$$\boxed{\underline{\text{Lemma:}}\quad \det e^{tA} = e^{t\,\mathrm{Sp}A}}$$

Somit: $\left.\begin{array}{l}\text{Volumen zum}\\ \text{Zeitpunkt } t\end{array}\right\} = e^{t\,\mathrm{div}A}$.

$$\boxed{\underline{\text{Def:}}\quad v: U \to \mathbb{R}^n,\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen heißt } \underline{\text{quellenfrei}}, \text{ falls } \operatorname{div} v = 0.}$$

<u>Beispiel:</u> $v: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = \dfrac{x}{|x|^3}$

$$\operatorname{div} v(x) = \sum_{j=1}^{3} \partial_j \left(\frac{x_j}{|x|^3} \right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{|x|^3 - x_j \frac{3}{2} |x|\, 2 x_j}{|x|^6}$$

$$= 0. \quad (x \neq 0)$$

Die Quellstärke von v liegt hier im Ursprung.
Wir werden im 3. Semester zeigen: $\operatorname{div} v(x) = 4\pi\,\delta(x)$
wobei δ die δ-Distribution bezeichnet.

<u>Bem:</u> Im 3. Semester werden wir mit Hilfe des Satz von Gauß die Divergenz nochmals als Quellstärke eines Vektorfelds identifizieren.

Bereits auf S. 37 wurde definiert:

$$\boxed{\operatorname{grad} f : U \to \mathbb{R}^n, \quad \operatorname{grad} f(x) := \nabla f(x)}$$

Gradient einer diffbaren Fkt $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Der Laplace Operator mißt Quellstärke eines Gradientenfelds.

Def: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt

$$\Delta : \mathcal{C}^{k+1}(U) \to \mathcal{C}^{k-1}(U)$$

$$f \mapsto \Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 f$$

$$= \nabla^2 f$$

der Laplace Operator.

Beispiel: $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{|x|}$

$$\operatorname{grad} f(x) = -\frac{x}{|x|^3} \implies \Delta f(x) = 0 \quad (x \neq 0)$$

Def: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v: U \to \mathbb{R}^n$ diff.bares Vektorfeld.
Dann heißt für

<u>$n=2$:</u> $\operatorname{rot}: U \to \mathbb{R}$, $\operatorname{rot} v(x) := \partial_1 v_2(x) - \partial_2 v_1(x)$

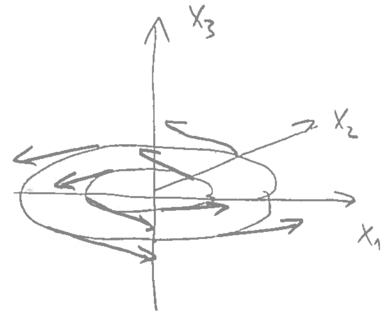
<u>$n=3$:</u> $\operatorname{rot}: U \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{rot} v(x) := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3(x) - \partial_3 v_2(x) \\ \partial_3 v_1(x) - \partial_1 v_3(x) \\ \partial_1 v_2(x) - \partial_2 v_1(x) \end{pmatrix}$

die *Rotation von v*.

<u>Merkregel und Schreibweise für $n=3$:</u>

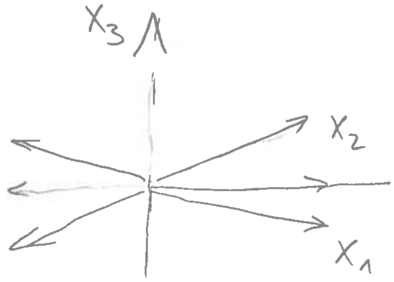
$$\operatorname{rot} v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \nabla \times v$$

<u>Beispiele:</u> 1. $v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\operatorname{rot} v(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. $v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\operatorname{rot} v(x) = 0$ (Da $v(x) = \nabla\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right)$ ist dies ein Spezialfall von Eigenschaft 2.ii) unten)

Bemerkung (Rotation in allg. Dimension)

Beobachtung für $n=3$: $Dv - (Dv)^T =$

$$\begin{pmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_2 v_1 & \partial_3 v_1 \\ \partial_1 v_2 & \partial_2 v_2 & \partial_3 v_2 \\ \partial_1 v_3 & \partial_2 v_3 & \partial_3 v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & \dots & \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -(\operatorname{rot} v)_3 & (\operatorname{rot} v)_2 \\ (\operatorname{rot} v)_3 & 0 & -(\operatorname{rot} v)_1 \\ -(\operatorname{rot} v)_2 & (\operatorname{rot} v)_1 & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. antisymm. Anteil der Jacobi-Matrix liefert $\operatorname{rot} v$.

Allgemeiner gilt für diff.bare $v: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

$Dv - (Dv)^T$ hat $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängige Komponenten

Diese Komponenten werden mit $\operatorname{rot} v$ identifiziert

Bsp $n=2$ $\quad \operatorname{rot} v = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$ ist Skalar

$n=4$ $\quad \operatorname{rot} v$ hat 6 Komponenten.

Beispiel 1 & 2 motiviert

> **Def:** $v: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt <u>wirbelfrei</u>, falls
> $$\operatorname{rot} v = 0$$

(Mehr dazu im 3. Semester: Satz von Stokes)

18.2. Rechenregeln

Sprechweise: Nabla Operator $\nabla := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$

Satz (Nabla Kalkül) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

1. $f_j \in \mathcal{C}^1(U)$, $v_j \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $j = 1, 2$

i) $\nabla(f_1 + f_2) = \nabla f_1 + \nabla f_2$, $\nabla \cdot (v_1 + v_2) = \nabla \cdot v_1 + \nabla \cdot v_2$

ii) $\nabla \cdot (fv) = (\nabla f) \cdot v + f(\nabla \cdot v)$

Spezialfall $n = 3$:

iii) $\nabla \times (v_1 + v_2) = \nabla \times v_1 + \nabla \times v_2$

$\nabla \cdot (v_1 \times v_2) = v_2 \cdot (\nabla \times v_1) - v_1 \cdot (\nabla \times v_2)$

$\nabla \times (v_1 \times v_2) = v_1 (\nabla \cdot v_2) - (v_1 \cdot \nabla) v_2 + (v_2 \cdot \nabla) v_1 - v_2 (\nabla \cdot v_1)$

$\nabla (v_1 \cdot v_2) = (v_1 \cdot \nabla) v_2 + (v_2 \cdot \nabla) v_1 + v_1 \times (\nabla \times v_2) + v_2 \times (\nabla \times v_1)$

iv) $\nabla \times (fv) = f(\nabla \times v) + (\nabla f) \times v$

2. $f \in \mathcal{C}^2(U)$, $v \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^n)$ $\qquad \nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$

Spezialfall $n = 3$:

i) $\nabla \times (\nabla f) = 0$ $\qquad$ ii) $\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0$

iii) $\nabla \times (\nabla \times v) = \nabla (\nabla \cdot v) - \Delta v$

Beweis: Übung □

Beispiel: $v(x) = \frac{1}{2} B \times x$, $B, x \in \mathbb{R}^3$

$$\nabla \times v(x) \underset{1.\,iii)}{=} \frac{1}{2} B \underbrace{(\nabla \cdot x)}_{=3} - \frac{1}{2} \underbrace{(B \cdot \nabla) x}_{=B} = B$$

(Vektorpotential eines konstanten Magnetfeld)

18.3. Gradientenfelder: Konservativ & wegunabhängig

Def: Vektorfelder $v \in \mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, von der Form

$$v = \nabla f \quad \text{mit } f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$$

heißen Gradientenfelder mit Potential f.

Wichtige Beispiele aus Physik:

v Kraftfeld z.B. elektrisches Feld

f Potential z.B. — Potential

Frage: Ist jedes Vektorfeld ein Gradientenfeld?

Fall $n=1$: Ja, denn Stammfunktion f von v erfüllt $v=f'$.

Fall $n \geq 2$: Nein Gegenbeispiel z.B. S. 100 (1).

Lemma Für $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v = \nabla f$ gilt die Integrabilitätsbedingung: $\forall\, j,k \in \{1,\dots,n\}$

$$\boxed{\partial_j v_k = \partial_k v_j} \qquad (*)$$

Beweis: Satz von Schwarz $\square$

Bem: Integrabilitätsbedingung $(*)$ für

$n=2$: $\quad \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = \operatorname{rot} v = 0$

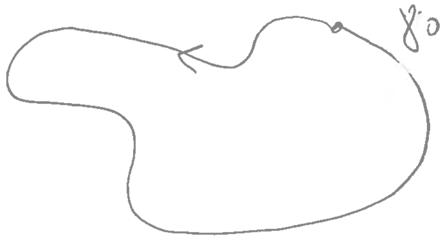
$n=3$: $\quad \operatorname{rot} v = 0$

(vgl. Eigenschaft 2.i) S. 102)

Def: Vektorfelder $v \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ heißen *konservativ*, falls für alle stückweise stetig diff.baren Kurven $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt:

$$\oint_\gamma v(y) \cdot dy := \int_\gamma v(y) \cdot dy = 0$$

(geschlossenes Kurvenintegral)



$\gamma(0) = \gamma(1)$

Gradientenfelder sind konservativ. Dies folgt aus der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals.

Lemma: $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma : [0,1] \to U$ stückweise stetig diff.bare Kurve. Dann:

$$\int_\gamma \nabla f(y) \cdot dy = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

Beweis: o.B.d.A nur für $\mathcal{C}^1$-Kurven

$$\text{l.S.} = \int_0^1 \nabla f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\, dt$$

Def des Kurvenint.

$$= \text{r.S.} \qquad \square$$

HDI

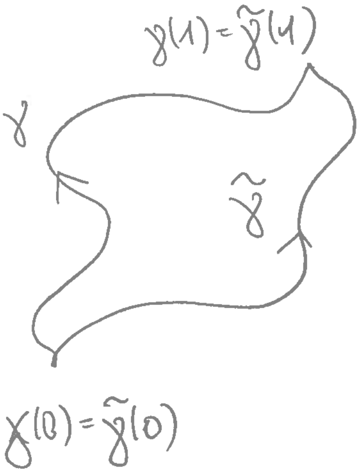
Der folgende Satz zeigt die Äquivalenz der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals und der Existenz eines Potentials.

Satz Für Vektorfelder $v \in \mathcal{C}(U,\mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sind äquivalent:

1. v ist konservativ
2. v ist Gradientenfeld
3. Für alle stückweise stetig diff.baren Kurven $\gamma:[0,1]\to U$ hängt $\int_\gamma v(y)\cdot dy$ nur von den Endpkt ab.

Beweis: 2. $\Rightarrow$ 1. Lemma S. 105.

1. $\Rightarrow$ 3. Seien $\gamma, \tilde\gamma : [0,1] \to U$ stückw. stetig diff.bar mit $\gamma(0)=\tilde\gamma(0)$ und $\gamma(1)=\tilde\gamma(1)$. Betrachte:



$$\hat\gamma : [0,2] \to U \quad \hat\gamma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & t\in[0,1] \\ \tilde\gamma(2-t) & t \in [1,2] \end{cases}$$

Dann gilt: $\hat\gamma(0)=\hat\gamma(2)=0$ und somit

$$\int_\gamma v(y)\cdot dy - \int_{\tilde\gamma} v(y)\cdot dy = \int_{\hat\gamma} v(y)\cdot dy \overset{1.}{=} 0 .$$

3. $\Rightarrow$ 2. (nur Skizze des Beweis)

U zerfällt in Zusammenhangskomponenten $U = \bigcup_j U_j$, wobei für bel $x_j, x \in U_j$ stetig diffbare Kurve $\gamma_{x_j,x} : [0,1] \to U_j$ mit $\gamma_{x_j,x}(0) = x_j$, $\gamma_{x_j,x}(1) = x$ existiert.

Wähle für U_j ein $x_j \in U$ und setze:

$$\boxed{f(x) := \int_{x_j}^{x} v(y)\cdot dy = \int_{\gamma_{x_j,x}} v(y)\cdot dy \,, \quad x \in U_j}$$

Dann gilt für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h|$ klein:

$$\frac{f(x+h) - f(x) - v(x)\cdot h}{|h|} = \frac{\int_x^{x+h} v(y)\cdot dy - v(x)\cdot h}{|h|}$$

$$= \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} \big(v(y) - v(x)\big)\cdot dy = (*)$$

$$|(*)| \le \sup_{|y-x| \le |h|} |v(y) - v(x)| \xrightarrow{|h| \to 0} 0,$$

da v stetig $\square$

18.4. Integrabilität von Vektorfeldern

<u>Frage:</u> Ist die Integrabilitätsbedingung (*) auf S. 104
hinreichend für die Konservativität von v? Nein!

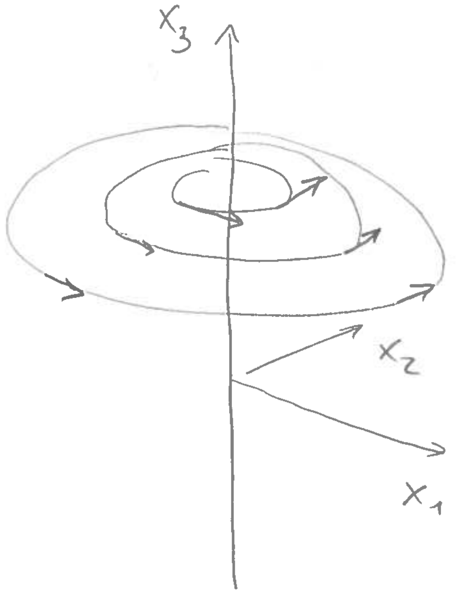
<u>Beispiel:</u> Magnetfeld eines Linienstroms entlang x_3-Achse

$$v(x) = \begin{pmatrix} -x_2/(x_1^2+x_2^2) \\ x_1/(x_1^2+x_2^2) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 0\}$$

$$\operatorname{rot} v(x) = \nabla \times v(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{x_1^2+x_2^2-2x_1^2+x_1^2+x_2^2-2x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix} = 0$$

Aber: v ist nicht konservativ, z.B. $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

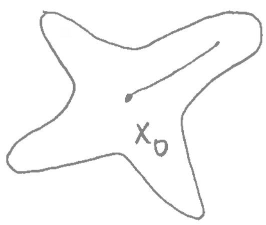


$$\oint_\gamma v(\gamma)\cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= 2\pi \neq 0 \,!$$

Def: $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, falls es ein $x_0 \in U$ gibt, so dass für alle $x \in U$ und alle $t \in [0,1]$:

$$x_0 + t(x - x_0) \in U$$



Satz (Lemma von Poincaré)

$v \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. Dann sind äquivalent:

1. Integrabilitätsbed. $\forall j,k \in \{1, .., n\}$
$$\partial_j v_k = \partial_k v_j$$

2. Existenz eines Potentials: $\exists f \in \mathcal{C}^2(U)$:
$$v = \nabla f$$

Beweis: 2. $\Rightarrow$ 1. Lemma S 104
1. $\Rightarrow$ 2. siehe unten □

Bemerkungen & Ergänzungen:

1. Satz bleibt gültig, falls man sternförmig durch einfach zusammenhängend ersetzt. D.h. jede Kurve