# 16. Extrema mit Nebenbedingungen

## 16.1. Problemstellung & Beispiele:

Beispiele: 1. $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1$ mit

$$D := \overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$$

Frage: Globale Extrema von $f$?

Für $x \in B_1(0)$ gilt: $\nabla f(x) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$

Also keine kritischen Punkte od. Extrema in $B_1(0)$!

Untersuche Verhalten am Rand $\partial D = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$:

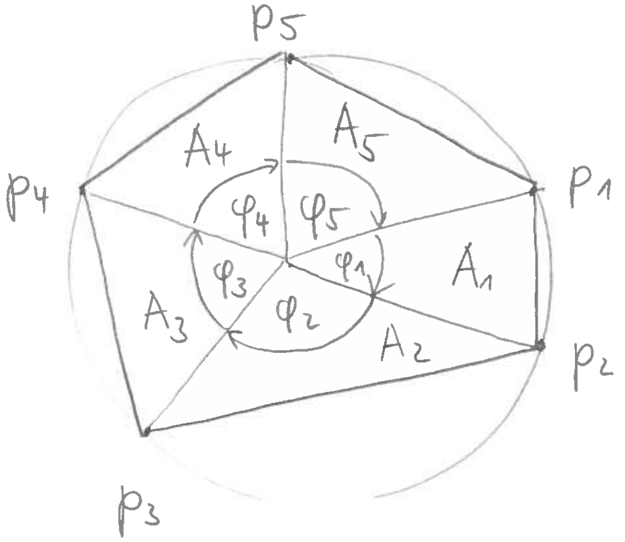
Parametrisierung von $S^1$: $x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi)$

Es gilt: $f(x(t)) = \cos(t)$. Somit ein Maximum bei $t = 0$ und ein Minimum bei $t = \pi$.

Fazit: Globales Max bei $x = e_1$

— Min $x = -e_1$.

2. Punkte $p_1, \dots, p_n \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit $n \geq 3$.




**Frage:** Welche Konfiguration maximiert Flächeninhalt der Polygone $A_1, \dots, A_n$?

Flächeninhalt $A_j = \frac{1}{2} \sin(\varphi_j)$

$$f : [0, 2\pi)^n \to \mathbb{R}, \quad f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} \sin(\varphi_j).$$

Nebenbedingung: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varphi_j = 2\pi$.

Parametrisierung der Nebenbedingung: $\varphi_n = 2\pi - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j$

$$g : [0, 2\pi)^{n-1} \to \mathbb{R}, \quad g(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) := f\Big(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, 2\pi - \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j\Big)$$

Es gilt: $$\nabla g(\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) - \cos\big(2\pi - \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j\big) \\ \vdots \\ \cos(\varphi_{n-1}) - \cos\big(2\pi - \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j\big) \end{pmatrix}$$

Extrema von $g$:

i) alle außer einen Winkel gleich null (glob. Min.)

ii) alle $\varphi_j = \frac{2\pi}{n}$ $(j = 1 \dots n)$ (glob. Max.)

Bestandsaufnahme:

1. Nebenbedingungen treten auf als
   i) Ungleichungen (Bsp 1 $\sqrt{x_1^2+x_2^2} \leq 1$), oder
   ii) Gleichungen (Bsp 2 $\sum_j \varphi_j = 2\pi$).

2. Zur Suche nach Extrema von Funktionen $f$ unter Nebenbedingungen:
   i) für Ungleichungen $g(x) \leq 0$:
   Untersuche $f$ auf $\{x \mid g(x) < 0\}$
   (offen für stetige $g$, d.h. Sätze Kap. 15 anwendbar)
   Betrachte danach $f$ auf $\{x \mid g(x) = 0\}$ (*)
   ii) für Gleichungen $g(x) = 0$: siehe (*).

Problem (*): Finde Extrema von $f \in C^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen unter $m < n$ Nebenbedingungen: $g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_m(x) = 0$

$$NB: \; g\; U \to \mathbb{R}^m, \; g(x) := \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix} = 0$$

## <u>Lösungsmethode 1</u>: Parametrisierung der NB

Falls $\text{Rang}\, Dg(x) = m$ für alle $x \in N_0(g)$, läßt sich (gemäß S. 70) $N_0(g) = \{x \in \mathcal{U} \mid g(x) = 0\}$ lokal durch Funktion $h$ von $m$ Koordinaten parametrisieren.

Studiere $\xi \mapsto f(\xi, h(\xi))$!

<u>Beispiel</u>: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot (Ax)$, $A = A^T \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$

Nebenbedingung $g(x) = |x| - 1 = 0$ (Einheitssphäre $S^{n-1}$ im $\mathbb{R}^n$!)

Lokale Parametrisierung durch verall. Polarkoordinaten:

$$P: (0,\infty) \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$$

$$P_n(r, \varphi_1, \dots \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi_{n-1}) \cdots \cos(\varphi_1) \\ \vdots \\ r \cos(\varphi_{n-1}) \cdots \cos(\varphi_j) \sin(\varphi_{j-1}) \\ \vdots \\ r \sin(\varphi_{n-1}) \end{pmatrix}$$

möglich – aber kompliziert!

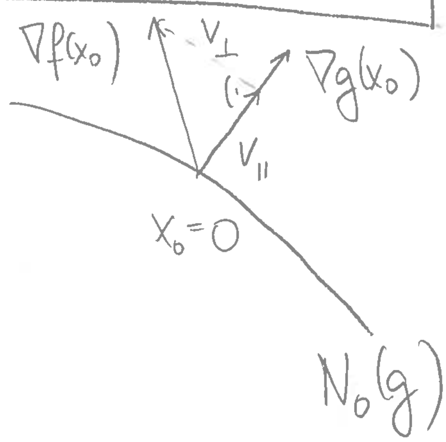
## <u>Lösungsmethode 2</u>: Lagrange-Multiplikatoren!

## 16.2 Methode der Lagrange-Multiplikatoren

**Satz** (Lagrange-Multiplikator – vereinfachte Version)

Zu jeder Lösung $x_0 \in U$ des Extremalproblems zu $f \in \mathcal{C}^1(U)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen unter der Nebenbedingung $g(x_0) = 0$ mit $g \in \mathcal{C}^1(U)$, $\nabla g(x_0) \neq 0$, gibt es ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x_0) + \lambda_0 \nabla g(x_0) = 0 \qquad (*)$$




Beweis: Schreibe $\nabla f(x_0) = v_\parallel + v_\perp$ mit

$$v_\perp \cdot \nabla g(x_0) = 0$$

Annahme: $v_\perp \neq 0$. Dann gilt:

$$D_{v_\perp} f(x_0) = v_\perp \cdot \nabla f(x_0) = |v_\perp|^2 > 0.$$

Also steigt $f$ in Richtung $v_\perp$. Da $\nabla g(x_0)$ senkrecht auf den Tangenten an Kurven in $N_0(g)$ steht, ist dies im Widerspruch zur Extremalität von $f$ bei $x_0$ unter der NB $g(x_0) = 0$. $\square$

Bem.: 1. Bed. (*) besagt: $\nabla f(x_0)$, $\nabla g(x_0)$ sind lin. abhängig.

2. Unter den Vor. des Satzes besitzt $F: U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x,\lambda) := f(x) + \lambda g(x)$$

bei $(x_0, \lambda_0)$ einen kritischen Punkt, denn:

$$\nabla F(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Beispiel: $F(x,\lambda) = x \cdot Ax + \lambda(|x|^2 - 1)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\nabla F(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 2Ax + 2\lambda x \\ -|x|^2 + 1 \end{pmatrix} = 0$$

i) $(A + \lambda)x = 0$, d.h. $-\lambda$ ist Eigenwert von $A$ & $x$ Eigenvektor

ii) $|x|^2 = 1$, d.h. $x$ normiert.

Falls alle EW von $A$ verschieden sind, liegen die Extremalstellen von $f(x) = x \cdot Ax$ auf den Antipoden $x, -x \in S^{n-1}$ der Richtungen der Eigenvektoren. Z.B. für

$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & a_3 \end{pmatrix}$ mit $a_1 < a_2 < a_3$ sind Maxima bei $x = \pm e_3$

Minima – $x = \pm e_1$.

Sattelpkt – $x = \pm e_2$.

**Satz** (Lagrange Multiplikatoren)

Sei $f \in \mathcal{C}^1(U)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$ mit $m < n$

Zu jeder Lösung $x_0$ des Extremalproblems zu $f$ unter der Nebenbedingung $g(x_0) = 0$ für die $\operatorname{Rang} Dg(x_0) = m$ gilt, gibt es $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\nabla f(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x_0) = 0$$

Fazit: Kandidaten für lokale Extremalstellen von $f \in \mathcal{C}^1(U)$ unter NB $g = 0$ sind somit Lösungen $x_0$ des nicht-linearen Gleichungssystems

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x) &= 0 \\ g(x) &= 0 \end{aligned}}$$

$n+m$ Gleichungen für $n+m$ Unbekannte $(x, \lambda)$!

**Beispiel:** Finde den Punkt auf der Ebene

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y-z=5\}$$

welcher dem Ursprung am nächsten ist.

Abstandsquadrat: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

NB: $g(x,y,z) = 2x+3y-z-5 = 0$

$$\nabla f(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lagrange Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$: $\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2\lambda &= 0 \\ 2y + 3\lambda &= 0 \\ 2z - \lambda &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -2\lambda - 3 \cdot \frac{3}{2}\lambda - \frac{\lambda}{2} = 5$$

$$\lambda = -\frac{10}{14} = -\frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{7} \quad y = \frac{15}{14} \quad z = -\frac{5}{14}.$$

Da es einen nächsten Punkt in E gibt, ist $\left(\frac{5}{7}, \frac{15}{14}, -\frac{5}{14}\right)$ der gesuchte Punkt.