Satz (Kettenregel)

Sei $f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, bei $x \in U$ differenzierbar und $g: V \to \mathbb{R}^l$ mit $V \supset f(U)$ offen bei $y := f(x)$ differenzierbar.

Dann ist $g \circ f: U \to \mathbb{R}^l$, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ bei x differenzierbar mit

$$D\, g \circ f(x) = Dg(f(x))\, Df(x)$$

Matrixmultipl.!

Beweisskizze: $A := Df(x)$, $B := Dg(y)$

$$(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) - BAh$$

$$= \underbrace{g(y + u(h)) - g(y) - B\,u(h)}_{= o(|u(h)|)} + B \underbrace{\left[f(x+h) - f(x) - Ah \right]}_{= o(|h|)}$$

$u(h) := f(x+h) - f(x)$

Es gilt: $$\frac{|u(h)|}{|h|} \leq \underbrace{\frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} + \frac{|Ah|}{|h|}}_{\text{beschränkt für } h \to 0}$$

Somit $o(|u(h)|) = o(|h|)$ □

Beispiele: 1. Punktteilchen auf C^1 Kurve $x: I \to \mathbb{R}^n$ im Potential $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Änderung des Potentials entlang der Kurve:

$$\frac{d}{dt}\varphi(x(t)) \underset{\text{Kettenregel}}{=} D\varphi(x(t))Dx(t) = \nabla\varphi(x(t))\cdot\dot{x}(t)$$
$$= D_{\dot{x}(t)}\varphi(x(t)).$$

2. Funktion $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (lokal) in Polarkoordinaten:

$$x(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad r \in (0,\infty),\ \varphi \in (0,2\pi)$$

Betrachte $G: (0,\infty)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}$, $G(r,\varphi) = g(x(r,\varphi))$

$$DG(r,\varphi) \underset{\text{Kettenregel}}{=} Dg(x(r,\varphi))\,Dx(r,\varphi)$$
$$= \big(\partial_1 g(x(r,\varphi))\ \ \partial_2 g(x(r,\varphi))\big)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad D_r G(r,\varphi) = \cos\varphi\,\partial_1 g(x(r,\varphi)) + \sin\varphi\,\partial_2 g(x(r,\varphi))$$
$$D_\varphi G(r,\varphi) = -r\sin\varphi\,\partial_1 g(x(r,\varphi)) + r\cos\varphi\,\partial_2 g(x(r,\varphi))$$

13.5. Höhere Ableitungen

<u>Def.</u> Sei $f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Existieren für $k \in \mathbb{N}$, $\ell \le k$, beliebige $i_1, \dots, i_\ell \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ die partiellen Ableitungen der Ordnung ℓ:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} f_j$$

und sind diese stetig, dann heißt f k mal stetig differenzierbar.

Man setzt: $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n) := \{ f: U \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ k mal stetig diff'bar} \}$

$$\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n) := \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$$

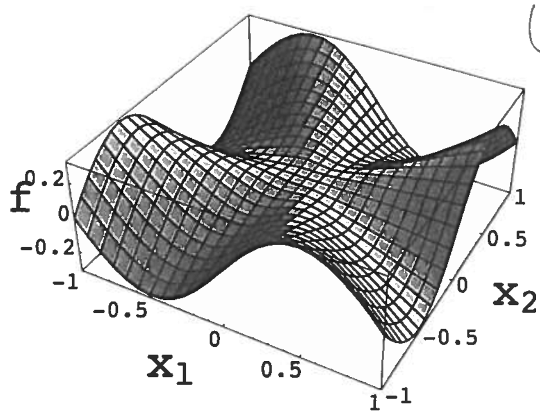
$$\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$$

Abkürzungen: $\mathcal{C}^k(U) := \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} f_j = D_{x_{i_1} \dots x_{i_\ell}} f_j = \frac{\partial^\ell}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}} f_j$$

<u>Frage:</u> Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen?

$\underline{\text{Beispiel:}}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ gilt: $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} f(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial x_1} f(x) = \ldots$ (Übung) $\ldots$

$$= \frac{(x_1^2 - x_2^2)(x_1^4 + 10 x_1^2 x_2^2 + x_2^4)}{(x_1^2 + x_2^2)^3}.$$

Für $x = 0$ gilt: $\dfrac{\partial}{\partial x_1} f(0, x_2) = -x_2 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial x_1} f(0,0) = -1$

$$\neq$$

$\dfrac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, 0) = x_1 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} f(0,0) = 1$

$\underline{\text{Satz:}}$ (von Schwarz) Für $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen gilt für jede Permutation π:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(1)}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(k)}}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f$$

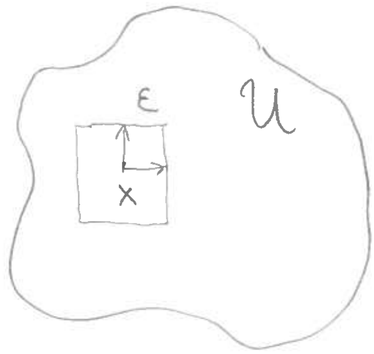
$\underline{\text{Erinnerung:}}$ Permutation π von k Elementen $=$ bijektive Abb $\pi: \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$

Beweis für $k=2$ und $m=2$ (o.B.d.A.)

Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, $x \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. Betrachte

$$\varphi(t,s) := \frac{f(x_1+t, x_2+s) - f(x_1+t, x_2) - \left(f(x_1, x_2+s) - f(x_1, x_2)\right)}{t \cdot s}$$

für $(t,s) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^2$ mit $\varepsilon > 0$ klein genug.



Es gilt: i) $\lim\limits_{t \to 0} \lim\limits_{s \to 0} \varphi(t,s) = D_1 D_2 f(x)$

ii) $\lim\limits_{s \to 0} \lim\limits_{t \to 0} \varphi(t,s) = D_2 D_1 f(x)$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert für:

- $F(t) := \dfrac{f(x_1+t, x_2+s) - f(x_1+t, x_2)}{s}$: $\exists \vartheta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:

$$\varphi(t,s) = \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(\vartheta) = \frac{D_1 f(x_1+\vartheta, x_2+s) - D_1 f(x_1+\vartheta, x_2)}{s} = (*)$$

- $G(s) := D_1 f(x_1+\vartheta, x_2+s)$: $\exists \varrho \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$(*) = \frac{G(s) - G(0)}{s} = G'(\varrho) = D_2 D_1 f(x_1+\vartheta, x_2+\varrho)$$

Analoges Argument: $\exists (\vartheta', \varrho') \in (-\varepsilon, \varepsilon)^2$: $\varphi(t,s) = D_1 D_2 f(x_1+\vartheta', x_2+\varrho')$

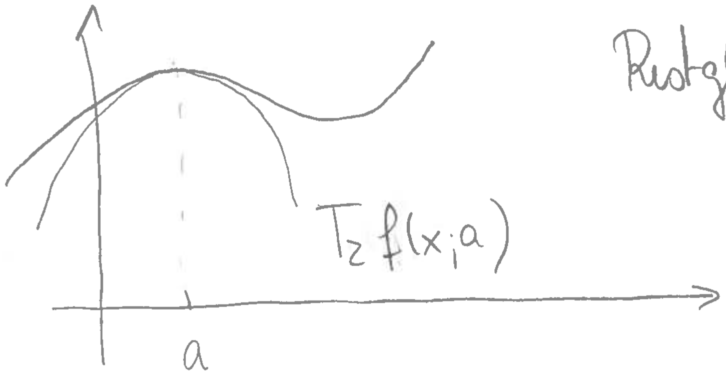
Da $D_1 D_2 f$ und $D_2 D_1 f$ stetig bei x und für $\varepsilon \downarrow 0$ gilt $(\vartheta, \varrho) \to 0$, $(\vartheta', \varrho') \to 0$ folgt: $D_1 D_2 f(x_1, x_2) = D_2 D_1 f(x_1, x_2)$

$\square$

14. Mehrdimensionale Taylorsche Formel und Extrema

Erinnerung: Taylorpolynom von $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$ um $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{k+1}(x)$$



Restglied $\exists\, \xi \in \mathbb{R}\ \ |\xi - a| \leq |x-a|$:

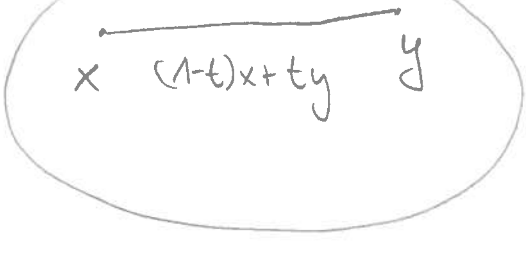
$$R_{k+1}(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

14.1. Satz von Taylor im $\mathbb{R}^m$

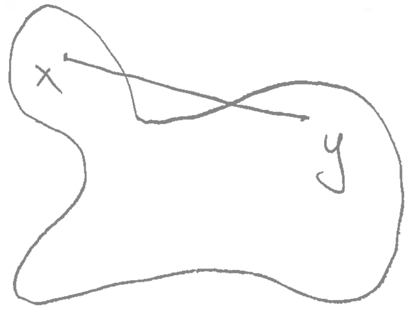
Betrachte $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ offen und konvex

Def: $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in \mathcal{U}$ auch $\{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\} \subset \mathcal{U}$.

Konvexe Menge im $\mathbb{R}^2$



nicht konvex



Für $h(t) := f(a + t(x-a))$ mit $x, a \in U$, $t \in [0,1]$:

- $h \in \mathcal{C}^{k+1}([0,1], \mathbb{R})$ mit Ableitungen $\quad l \in \{1, \dots, k+1\}$

$$\frac{d^l}{dt^l} h(t) = \frac{d^l}{dt^l} f(a + t(x-a)) = D^{(l)}_{x-a} f(a + t(x-a))$$

l-fache Richtungsableitung in Richtung $v := x-a$

- $h(0) = f(a)$, $h(1) = f(x)$.

Anwendung des Satzes von Taylor auf h liefert:

<u>Satz</u> (von Taylor im Mehrdimensionalen I)

Für $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, konvex, $a, x \in U$ gilt:

$$f(x) = f(a) + D_v f(a) + \frac{D_v^{(2)} f(a)}{2!} + \dots + \frac{D_v^{(k)} f(a)}{k!} + R_{k+1}(x)$$

wobei: i) $v := x - a$

ii) es gibt $\xi \in [0,1]$:

$$R_{k+1}(x) = \frac{D_v^{(k+1)} f(a + \xi v)}{(k+1)!}$$