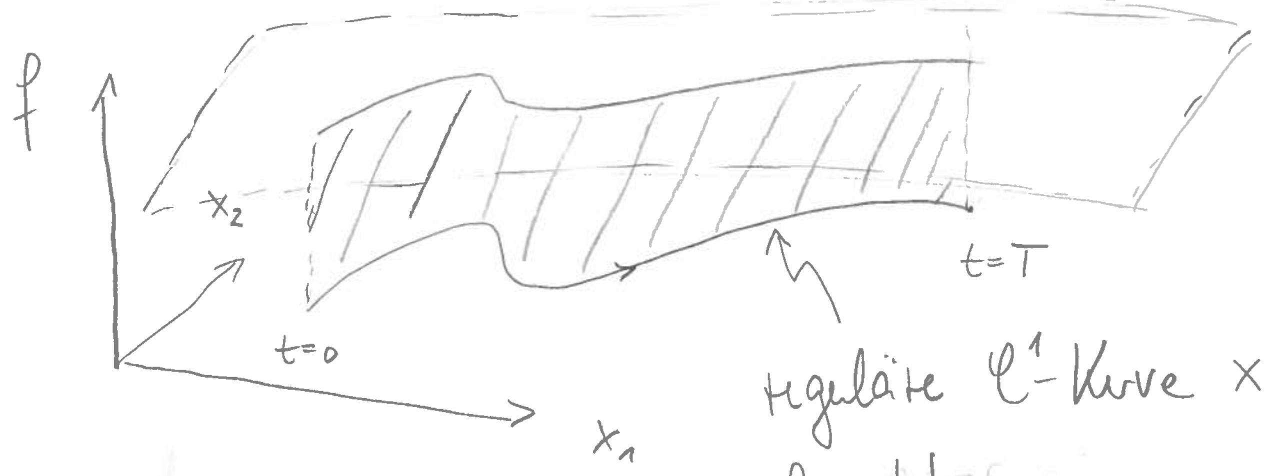
11.4. Kurvenintegrale

Typ I: Gesucht ist die Fläche der Mauer mit Grundlinie $x: [0,T] \to \mathbb{R}^n$ und Höhe $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$



reguläre C^1-Kurve x
f stetig:

Parametrisierung durch Bogenlänge σ: $\bar{x}(\sigma) = x(t(\sigma))$

$$\text{Fläche} = \int_0^{\sigma(T)} \underbrace{f(\bar{x}(\sigma))}_{\text{Höhe}} \times \underbrace{d\sigma}_{\text{Grundlinie}}$$

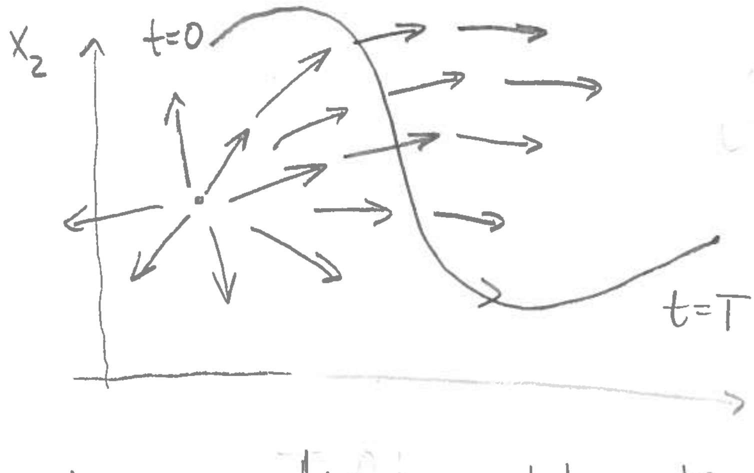
Subst. $t = t(s)$
$dt\,|\dot{x}(t)| = ds$

$$= \boxed{\int_0^T f(x(t))\,|\dot{x}(t)|\,dt}.$$

Typ II: Arbeitsintegral entlang Kurve im Kraftfeld

Kraftfeld $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

z.B. $\mathbb{R}^2$



Gesucht ist die vom Massenpunkt entlang Bahnkurve $x: [0,T] \to \mathbb{R}^n$ verrichtete Arbeit

Def: Für stetige[1] Vektorfelder $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{C}^1$-Kurven $x: I \to \mathbb{R}^n$ bezeichnet

$$\int_x F(y) \cdot dy := \int_I F(x(t)) \cdot \dot{x}(t)\, dt$$

das *Kurvenintegral* von F entlang x.

1) vgl. nächstes Kapitel!

Der Betrag des Kurvenintegrals ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve, das Vorzeichen hängt jedoch von der Orientierung ab.

<u>Beispiel:</u> $F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} \\ -\frac{x_1}{1+x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}$

$x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $x(t) = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $R > 0$.

$$\int_x F(y) \cdot dy = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{R \sin t}{1+R^2} \\ \frac{-R \cos t}{1+R^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= -\frac{R^2}{1+R^2} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)\, dt$$

$$= -2\pi \frac{R^2}{1+R^2}$$

Für $\bar{x} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\bar{x}(s) := x(-s)$ gilt:

$$\int_{\bar{x}} F(y) \cdot dy = \ldots = 2\pi \frac{R^2}{1+R^2}.$$

12 Kleine Umgebungslehre & Stetigkeit in metrischen Räumen

12.1. Metrische Räume

Zur Erinnerung:

Def: Eine Fkt $d: M \times M \to [0,\infty)$ auf einer Menge M heißt Metrik, falls für alle $x,y,z \in M$ gilt:

i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ — Definitheit

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ — Symmetrie

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ — Dreiecksungleichung

Das Paar (M,d) heißt metrischer Raum.

Jeder normierte Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ wird durch $d(x,y) := \|x-y\|$ ein metrischer Raum (V,d)

Bspe:
- $V = \mathbb{R}^n$ mit Euklidischen Norm $|x| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$
- $V = \mathbb{C}^n$ mit L^p-Norm $|x|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$.

  oder Maximumsnorm $|x|_\infty := \max_{j \in \{1,\dots,n\}} |x_j|$.

Weitere Beispiele:

1. Vektorraum der stetigen Funktionen $V = \mathcal{C}([a,b])$ mit

- $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$ p-Norm $p \geq 1$
- $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ Supremumsnorm

2. Menge von n Bitstrings $M = \{0,1\}^n$ mit Hammingabstand $d(x,y) = |\{ j \mid x_j \neq y_j \}|$

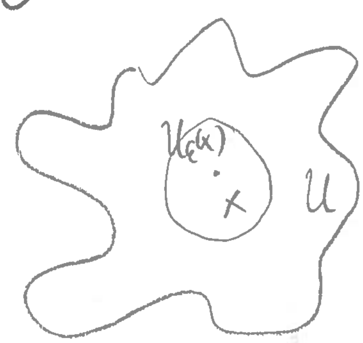
Für metrischen Raum (M,d) und $a \in M$, $\varepsilon > 0$:

$$\boxed{\mathcal{U}_\varepsilon(a) := \{ x \in M \mid d(x,a) < \varepsilon \}}$$

ε-Kugel od ε-Umgebung von a.

Def: Für einen metrischen Raum (M,d) heißt

1. jede Menge $U \subset M$ Umgebung von $x \in M$, falls $\exists \varepsilon > 0: \; \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset \mathcal{U}$



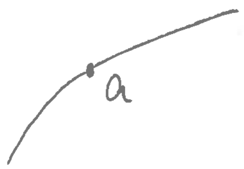
2. eine Menge $U \subset M$ *offen*, falls:

$$\forall x \in U: \exists \varepsilon > 0: \quad U_\varepsilon(x) \subset U$$

3. eine Menge $A \subset M$ *abgeschlossen*, falls $M \setminus A$ offen.

Bem: 1. Umgebungsbegriff ist Ersatz für Intervall im $\mathbb{R}^1$ für allgemeine metr. Räume (insbesondere $\mathbb{R}^n$).

Keine Umgebungen von $a \in \mathbb{R}^n$: $\{a\}$, Spur von Kurve, ...



2. Nicht jede Teilmenge von M ist offen oder abgeschlossen (z.B. $[a,b) \subset \mathbb{R}$)

3. Es gilt:
   i) M und $\emptyset$ sind offen
   ii) Durchschnitt zweier offener Mengen ist offen
   iii) beliebige Vereinigung offener Mengen ist offen.

Eine Menge von Teilmengen von M mit den Eigenschaften i)–iii) heißt Topologie (offener Mengen).

Der Durchschnitt ∞-vieler offener Mengen ist nicht notwendigerweise offen, z.B. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$.

12.2 Konvergenz in metrischen Räumen

Zur Erinnerung:

Def. Sei (M,d) metrischer Raum

1. Jede Abb. $a: \mathbb{N} \to M$ heißt Folge in M [kurz: (a_n)]
2. Eine Folge (a_n) heißt Cauchy Folge, falls
   $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n,m \geq N: \quad d(a_n, a_m) < \varepsilon$
3. Eine Folge (a_n) heißt konvergent gegen $a \in M$, falls
   $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N \quad d(a_n, a) < \varepsilon$

Bereits in Ana 1 gezeigt:

Satz. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy Folge

Umkehrung ist i.A. falsch.

Def. 1. Ein metrischer Raum heißt vollständig, falls jede Cauchy Folge konvergiert.

2. Vollständige normierte Vektorräume heißen Banachräume.

Satz $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ ist Banachraum

<u>Bem:</u> Satz gilt gleichermaßen für $V = \mathbb{C}^n$ und/oder jede p-Norm $|\cdot|_p$ mit $p \in [1, \infty]$.

<u>Beweis:</u> Sei (a_k) Cauchy Folge in $\mathbb{R}^n$. Aus

$$|x_j| \leq |x|_\infty \leq |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

folgt, dass jede Komponentenfolge $(a_{k,j})$ mit $j = 1, \dots n$ eine reelle Cauchy Folge ist. Da $\mathbb{R}$ vollständig, gibt es $a_j \in \mathbb{R}$ mit

$$a_j = \lim_{k \to \infty} a_{k,j}$$

Mit folgendem Satz schließt man: $a := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lim_{k \to \infty} a_k$

□

<u>Satz:</u> (Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$)

Für Folgen (a_k) in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ gilt:

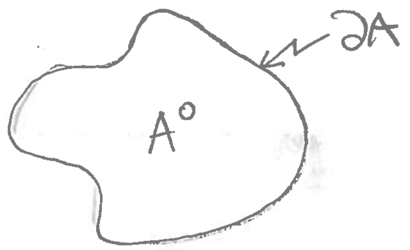
$$a = \lim_{k \to \infty} a_k \iff \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad a_j = \lim_{k \to \infty} a_{k,j}$$

(Beweis bereits in Ana 1)

Def.: Für Teilmenge $A \subset M$ eines metr. Raums (M,d) heißt

1. $A^\circ := \{x \in M \mid A \text{ ist Umgebung von } x\}$ das Innere
2. $\overline{A} := M \setminus (M \setminus A)^\circ$ der Abschluß.
3. $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$ der Rand.

Bem.: $A^\circ \subset A \subset \overline{A} = A^\circ \cup \partial A$



- A° ist größte offene Menge in A
- $\overline{A}$ ist kleinste abgeschlossene Menge in M, welche A enthält

Satz $\overline{A} = \{x \in M \mid \exists \text{ Folge } a: \mathbb{N} \to A : \lim_{n\to\infty} a_n = x\}$

Abschluß ist Menge aller Grenzwerte

Beweis: Übung.

12.3. Stetigkeit

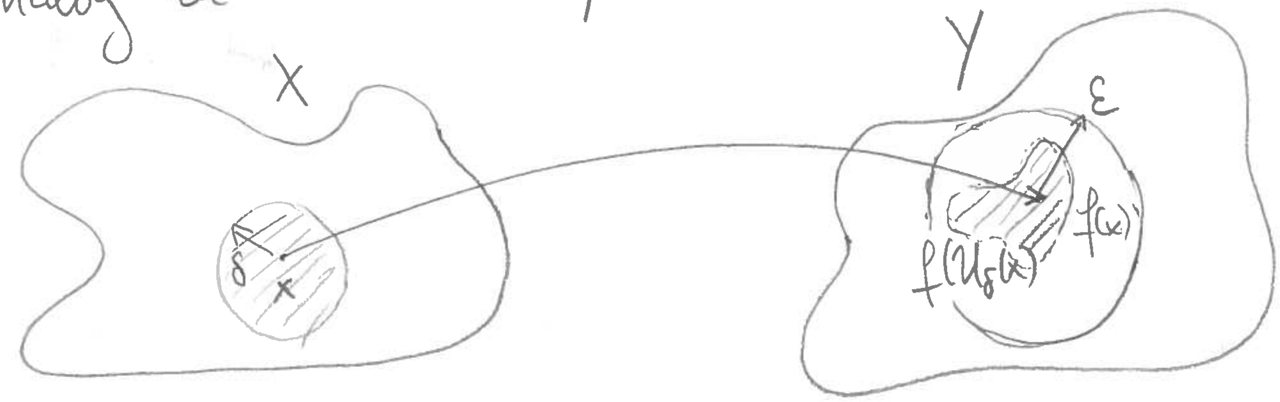
Def Sei $f: X \to Y$ Abb. zw. metr. Räumen $(X, d_X), (Y, d_Y)$.

1. f heißt stetig bei $x \in X$, falls:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

2. f heißt stetig, falls f in allen Pkten $x \in X$ stetig ist.

Analog zu $X = I \subset \mathbb{R} = Y$



Satz Äquivalente Aussagen:

1. f stetig bei $x \in X$
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \quad f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$
3. Zu jeder Umgebung V von $f(x) \in Y$ gibt es eine Umgebung U von $x \in X$ mit $f(U) \subset V$.

Beweis: 1 ⇒ 2. (durch Widerspruch)

Ann.: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists \ x_\delta \in X: \ d_X(x, x_\delta) < \delta \wedge d_Y(f(x), f(x_\delta)) \geq \varepsilon$

Für $\delta = \frac{1}{n}$ erhalten wir Folge (x_n) mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, aber $(f(x_n))$ konvergiert nicht gegen $f(x)$.

2. ⇒ 1.: Sei (x_n) Folge in X mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, d.h. $\forall \delta > 0 \ \exists N_\delta \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N_\delta: \ d_X(x, x_n) < \delta$. Sei nun $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta > 0$ gemäß 2. Dann gilt:

$\forall n \geq N_\delta: \ d_Y(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$.

2. ⇒ 3.:

Sei V Umgebung von $f(x)$, d.h. $\exists \varepsilon > 0: \ U_\varepsilon(f(x)) \subset V$.

Aus 2: $\exists \delta > 0: \ f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x)) \subset V$. Wähle $U = U_\delta(x)$.

3. ⇒ 2.:

Für $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(f(x))$ Umgebung von $f(x)$. Daher gibt es Umgebung U von x mit $f(U) \subset U_\varepsilon(f(x))$ und somit $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset U$. Also: $f(U_\delta(x)) \subset f(U) \subset U_\varepsilon(f(x))$

□

Mit Satz S.19 folgt:

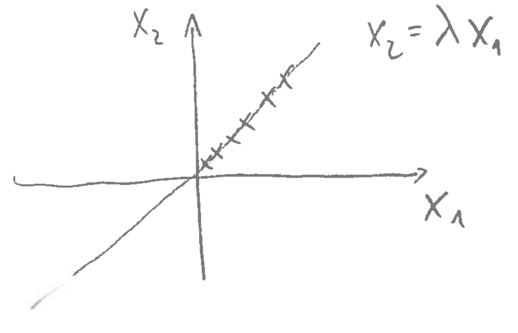
Satz (Stetigkeit in $\mathbb{R}^n$)
Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f: D \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$.
Es sind äquivalent:
1. f ist stetig bei $x \in D$
2. $f_j: D \to \mathbb{R}$ ist stetig bei $x \in D$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Warnung: Stetigkeit von $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$ ist mehr als nur die Stetigkeit in jeder Variablen!

Bsp: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 = x_2 = 0 \\ \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{sonst.} \end{cases}$

Es gilt: 1. $\forall a \in \mathbb{R}$: $y \mapsto f(a, y)$ stetig
2. $\forall b \in \mathbb{R}$ $x \to f(x, b)$ stetig

Aber: f ist nicht stetig bei 0, denn: $f(a, \lambda a) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$ $a, \lambda \neq 0$



. Nullfolge $\left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right) \longrightarrow (0,0)$

. $f\left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2} \neq 0 = f(0,0)$.

<u>Beispiele:</u> Jede lineare Funktion

$$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) = Ax \qquad A \ n \times m \text{ Matrix}$$

und jede quadratische Funktion

$$q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad q(x) = x \cdot Ax \qquad A \ n \times n \text{ Matrix}$$

ist stetig. Allgemeiner gilt: jedes Polynom in n Variablen ist stetig:

$$p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad p(x) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n} a_{k_1 \dots k_n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{k_j} .$$

endl. viele, reelle Koeffizienten $\neq 0$.

<u>Rechenregeln:</u>

1. Summen & Produkte stetiger Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind stetig.

2. Komposition stetiger Funktionen ist stetig.

Beweis: Übung.