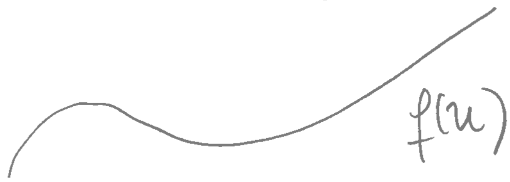
13. Differenzialrechnung im $\mathbb{R}^n$

__Ziel:__ Verallgemeinerung der Differenzialrechnung von Funktionen $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$ auf $f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$.

__Beispiele solcher Funktionen & ihre Visualisierung:__

1. $U \subset \mathbb{R}$ mehrpunktiges Intervall, $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig.



"__Kurve im $\mathbb{R}^n$__"

2. $m = 2$, $n = 1$:

   Graph $\{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^3$ ist Fläche über der zweidimensionalen Ebene

3. $m = n$: $f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld

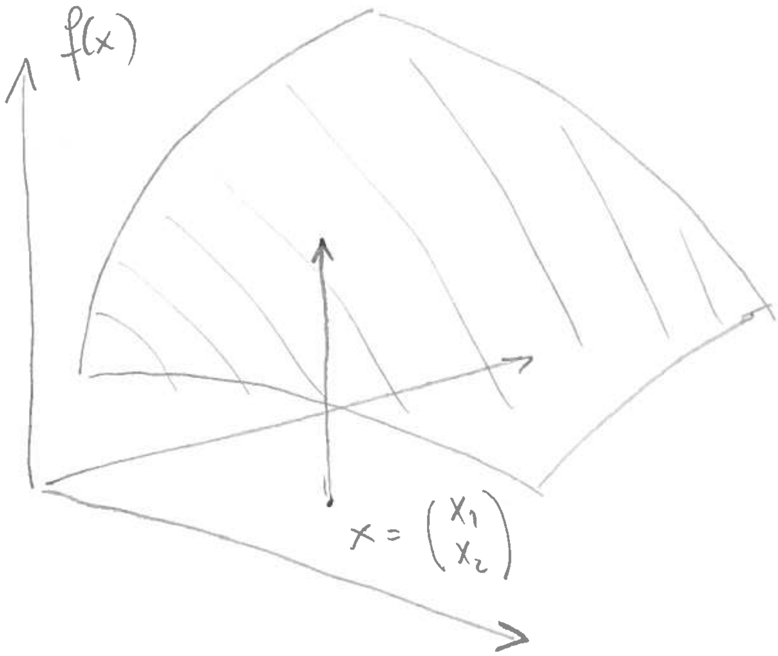
   Visualisierung mittels Vektorplot

4. Lineare Abbildungen: $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

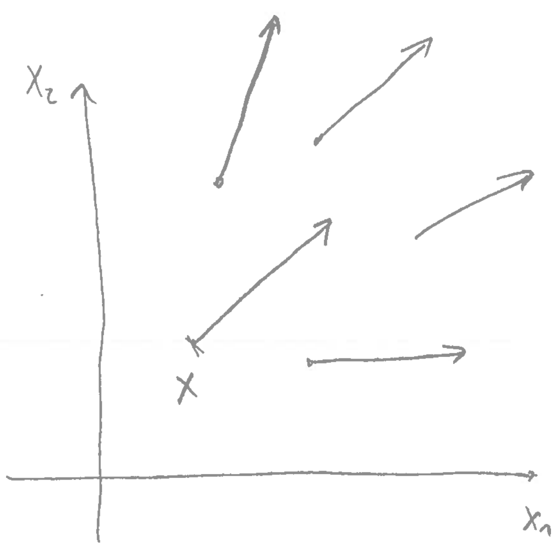
$f(x) = Ax$ mit $n \times m$ Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$

In Spezialfällen Visualisierung möglich.

Skizze zu 2. & 3.:



Graph einer skalaren Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

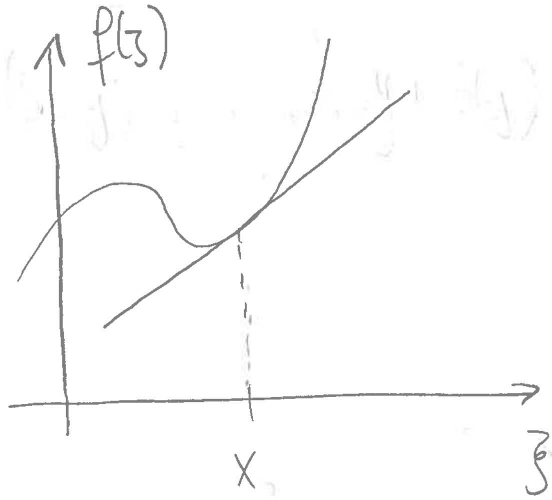


Vektorplot eines Vektorfelds $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

13.1. Totale Ableitung

Erinnerung: $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$ differenzierbar

Ableitung als lineare Näherung:



$$\boxed{f(x+y) = f(x) + f'(x)y + o(y)}$$

für $y \to 0$.

Def. Sei $f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Dann heißt f bei $x \in U$ (total) differenzierbar, wenn es eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ gibt, so daß

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x) - Ay}{|y|} = 0 \qquad (*)$$

Dann heißt $A = J_f(x)$ Jacobi-Matrix oder Ableitung von f bei x. Ist f für alle $x \in U$ differenzierbar, dann heißt f (total) differenzierbar und

$Df : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),\ x \mapsto Df(x)\ (= J_f(x))$ die **Ableitung von f**.

Bem: 1. Es gibt höchstens eine Matrix A, welche $(*)$ erfüllt. Denn: seien $A, A' \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ mit $(*)$, dann:

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{|y|}(A - A')y = 0 \implies A = A'$$

2. Wir unterscheiden im Folgenden nicht zwischen der lin. Abb. $Df(x)$ und ihrer Darstellungsmatrix $J_f(x)$.

3. Äquivalent zu $(*)$: $f(x+y) = f(x) + Ay + o(|y|)\ (y \to 0)$

Satz: $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, differenzierbar bei $x \in U$
$\implies f$ stetig bei x.

Beweis: Sei (x_n) Folge in U mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Dann:

$$f(x_n) = f(x) + A(x_n - x) + o(|x_n - x|)$$

$$\implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x) \qquad \square$$

13.2. Partielle Ableitungen

Def: $g: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ offen, besitzt bei $x \in \mathcal{U}$ die *kte partielle Ableitung* $D_k g(x) = \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = \partial_k g(x)$, wenn für $e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x + h e_k) - g(x)}{h} =: \frac{\partial g}{\partial x_k}(x)$$

existiert.

Beispiel: $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^3 - 3x_1 x_2^2$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = 3x_1^2 - 3x_2^2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) = -6x_1 x_2$$

Def: Der Vektor der partiellen Ableitungen von $g: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$

$$\nabla g(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$$

heißt *Gradient* von g bei $x \in \mathcal{U}$.

Satz: Ist $f: U \to \mathbb{R}^n$ bei $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ differenzierbar, dann existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$, $j = 1, \dots n$, $k = 1, \dots m$ und es gilt:

$$\begin{array}{cc} J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix} & \updownarrow n \\ \longleftarrow m \longrightarrow & \end{array}$$

Beweis: Für $y = h e_k$ mit $h \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x + h e_k) = f(x) + J_f(x)(h e_k) + o(|h e_k|)$$

$$\Rightarrow f_j(x + h e_k) = f_j(x) + h \left(J_f(x)\right)_{jk} + o(h)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) = \left(J_f(x)\right)_{jk} \quad \square$$

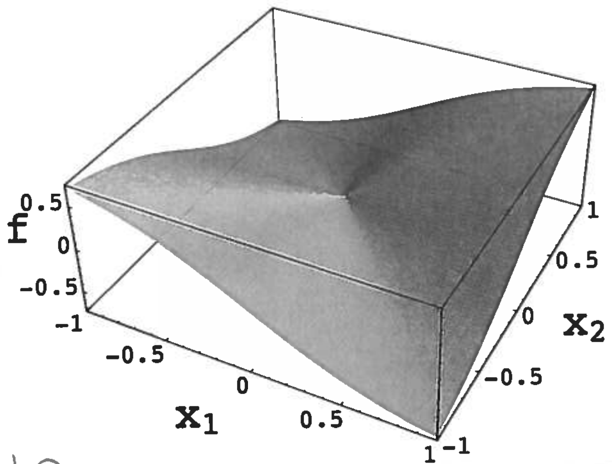
Bemerkung: $J_f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^T \end{pmatrix}$

Beispiele: 1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2 \\ x_2^2 - x_1^2 x_2 \end{pmatrix}$

Matrix der partiellen Ableitungen:

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)\right)_{j,k=1,2} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3x_2^2 & -6x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & 2x_2 - x_1^2 \end{pmatrix} = J_f(x)$$

Da $f(x+y) = f(x) + J_f(x)\,y + o(|y|)$ für $|y| \to 0$, ist f total differenzierbar. Dies läßt sich z.B. mit Satz S. 39 unten zeigen, da die partiellen Ableitungen alle stetig sind.



2. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x_1x_2}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2^3}{|x|^3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \quad (*) \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3}{|x|^3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Begründung für (*)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(he_1)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 .$$

Totale Ableitung bei $x=0$ existiert nicht, da z.B. für $y = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}$:

$$f(y)-f(0) = f(y) = \frac{|h|}{\sqrt{2}} \neq o(h) = o(|y|) \; !$$

<u>Fazit:</u> Existenz der partiellen Ableitungen

$\not\Rightarrow$ Existenz der totalen Ableitung!

<u>Satz</u> (Kriterium für totale Differenzierbarkeit)

$f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen besitze partielle Ableitungen

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} : U \to \mathbb{R} \qquad j=1,\dots,n, \; k=1,\dots,m$$

Falls diese bei $x \in U$ alle stetig sind, dann ist f bei x (total) differenzierbar.

Beweis: Da f genau dann diff.bar, wenn alle Komponentenabb. diff.bar sind, dürfen wir o.B.d.A $n=1$ annehmen. Da $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Für $y \in B_\varepsilon(0)$ setze:

$$y^{(k)} := \sum_{j=1}^{k} y_j e_j \,, \quad k = 1, \dots, m \qquad y^{(0)} := 0 \,.$$

Aus Mittelwertsatz der Differenzialrechnung: $\exists\, \vartheta_k \in (0,1)$

$$f(x + y^{(k)}) - f(x + y^{(k-1)}) = \frac{\partial f}{\partial x_k} \big(\underbrace{x + y^{(k-1)} + \vartheta_k y_k}_{=:\, z^{(k)}} \big)\, y_k$$

$$\Rightarrow \quad f(x+y) - f(x) = \sum_{k=1}^{m} \left(f(y^{(k)}) - f(y^{(k-1)}) \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\, y_k}_{= Df(x)\, y} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(z^{(k)}) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right) y_k}_{\xrightarrow[y \to 0]{} 0 \text{ wg. Stetigkeit.}}$$

$\square$

Fazit: $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$

stetig partiell diff.bar $\Rightarrow$ total diff.bar $\Rightarrow$ stetig.

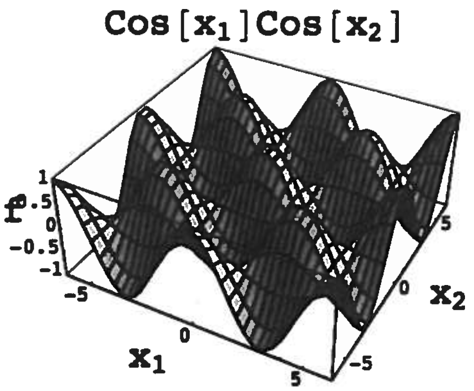
15.2. Richtungsableitung & Gradient

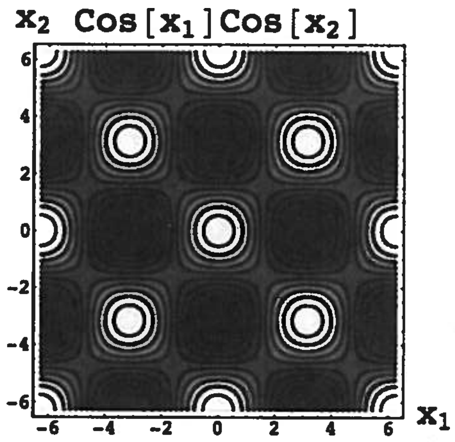
Der Gradient $\nabla f(x) = \operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$

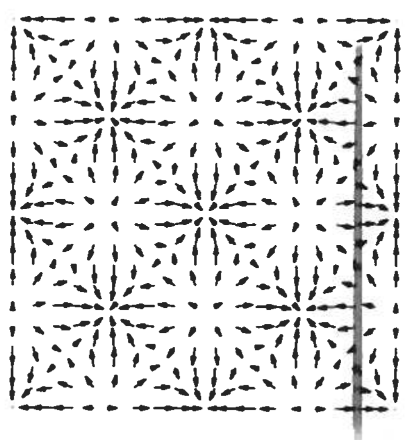
einer (total) differenzierbaren Funktion $f: U \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^m$, definiert ein Vektorfeld $\nabla f: U \to \mathbb{R}^m$ (Gradientenfeld)

Beispiel: $f(x) = \cos(x_1)\cos(x_2)$ „Eierkarton"

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1)\cos(x_2) \\ -\cos(x_1)\sin(x_2) \end{pmatrix}$$







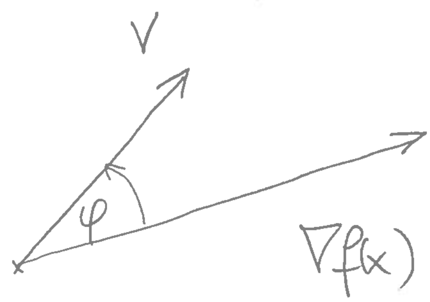
Def. Die Richtungsableitung einer (total) diff'baren Funktion $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, bei $x \in U$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^m$ ist durch

Skalarprodukt

$$D_v f(x) := J_f(x)\, v = \nabla f(x) \cdot v$$

gegeben.

Interpretation des Gradienten:



$v \in \mathbb{R}^m,\ |v| = 1$

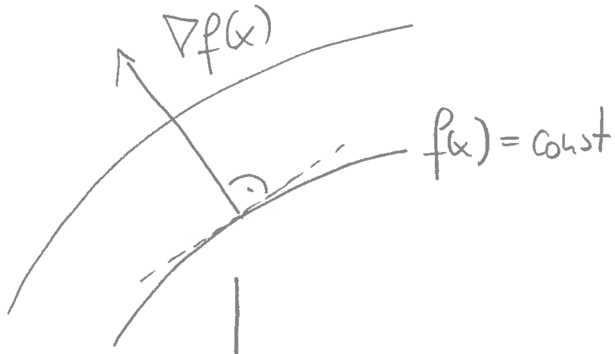
$$D_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v = |\nabla f(x)| \cos(\varphi) \qquad (*)$$

Für $\varphi = 0$ wird Maximum von $(*)$ erreicht.

Satz: Für $\nabla f(x) \neq 0$ zeigt der Gradient in Richtung des stärksten Anstiegs von f.

Es gilt: Gradient steht auf Höhenflächen senkrecht

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diff.bar.



$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Höhen- oder Niveauflächen}} \\ N_c(f) := \{ x \in U \mid f(x) = c \}.\end{array}}$$

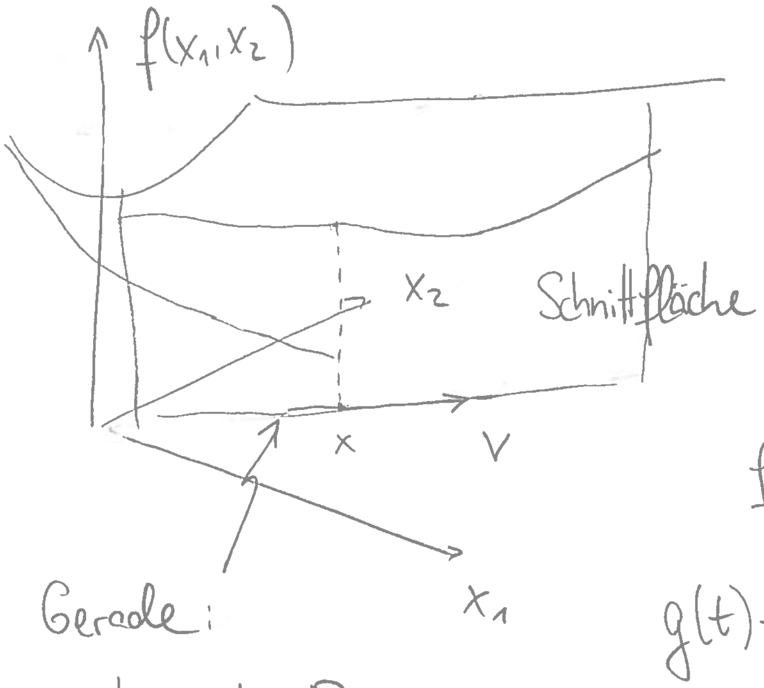
Beweis: Für $m=2$ Übung bzw. später $\square$

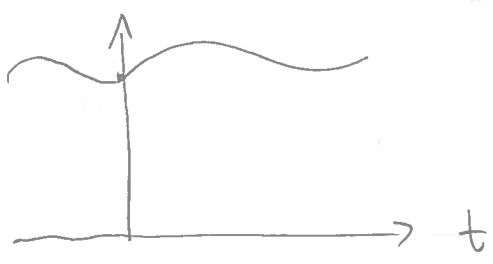
Geometrische Interpretation der Richtungsableitung

z.B. $m=2$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(t) := f(x + tv)$





f diff.bar $\Rightarrow$

$$g(t) - g(0) = J_f(x)(tv) + o(t|v|)$$

$$\Rightarrow g'(t) = J_f(x) v = D_v f(x).$$

13.4. Rechenregeln

Sinnvolle Verknüpfungen von $f, g: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $h: U \to \mathbb{R}$:

i) Addition: $f+g: U \to \mathbb{R}^n$, $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

ii) Skalarprodukt: $f \cdot g: U \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$

iii) skalare Multiplikation: $hf: U \to \mathbb{R}^n$, $(hf)(x) := h(x) f(x)$

Satz (Summen & Produktregeln)

Sind $f, g: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $h: U \to \mathbb{R}$ bei $x \in U$ diff.bar, dann gilt:

1. $f+g$ ist bei $x \in U$ diff.bar mit $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$
2. $f \cdot g$ und hf sind bei $x \in U$ diff.bar mit

   i) $$D(f \cdot g)(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[f_k(x) Dg_k(x) + g_k(x) Df_k(x) \right]$$

   ii) $$D(hf)(x) = \underbrace{f(x) Dh(x)}_{\in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})!} + h(x) Df(x) .$$

Bem: Äquivalent zu 2. i):

$$\nabla(f\cdot g)(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[f_k(x)\, \nabla g_k(x) + g_k(x)\, \nabla f_k(x) \right]$$

Äußeres Produkt zweier Vektoren in 2 ii)

$$f(x)\, \underbrace{\nabla h(x)^T}_{= Dh(x)} = \begin{pmatrix} f_1(x)\, \partial_1 h(x) & \cdots & f_1(x)\, \partial_m h(x) \\ & & \\ f_n(x)\, \partial_1 h(x) & & f_n(x)\, \partial_m h(x) \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation!

Beweis: 1. Übung!

2. i) $f(x+y) = f(x) + Df(x)\, y + o(|y|)$

$g(x+y) = g(x) + Dg(x)\, y + o(|y|) \qquad (y \to 0)$

$$\Rightarrow \quad f(x+y)\cdot g(x+y) = f(x)\cdot g(x) + \underbrace{f(x)\cdot \left[Dg(x)\, y \right] + g(x)\cdot \left(Df(x)\, y \right)}_{\sum_{k=1}^{n} \left[f_k(x)\, Dg_k(x)\, y + g_k(x)\, Df_k(x)\, y \right]} + o(|y|)$$

ii) analog $\square$