

Mathematik 3: Analysis für Physiker 2

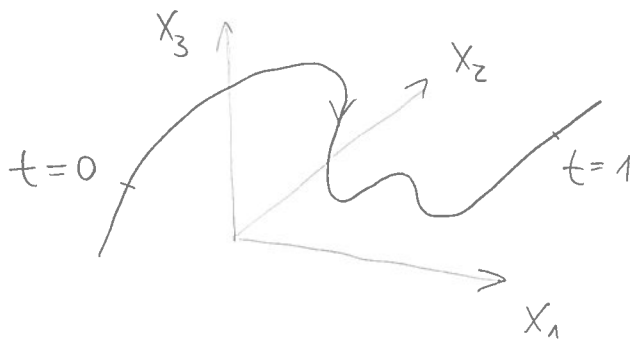
SoSe 2015

Zentrales Thema der Vorlesung:

Analysis von Funktionen $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

Beispiele: 1. $m=1$ Bahnkurven im \mathbb{R}^n

z.B. $n=3$



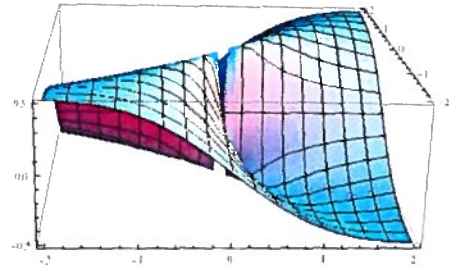
2. $n=1$ skalare Funktionen $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

Physik ($m=3$): Potentialfunktionen (el. Pot.)

Temperaturverteilungen ...

Visualisierung für $m=2$:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 = x_2 = 0 \\ \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

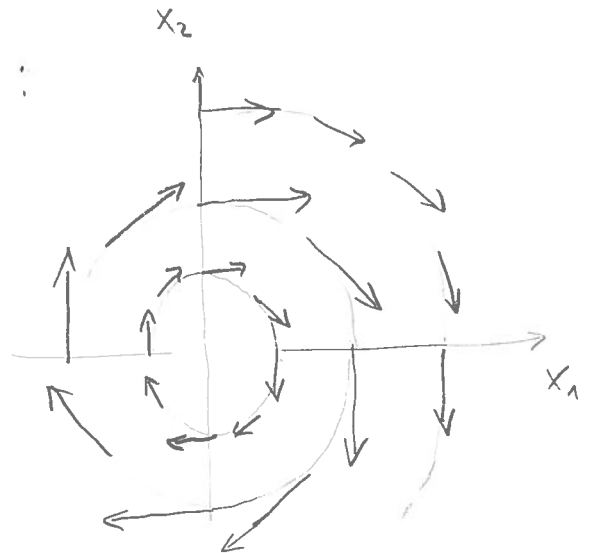


3. $n \geq 2$: Vektorfelder

Physik ($n=m=3$): Kraftfelder (el. Feld)
 Ströme
 Geschwindigkeitsfelder

Visualisierung für $n=m=2$:

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} \\ \frac{-x_1}{1+x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}$$



Lineare Algebra: Lineare Abbildungen $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(x) = Ax \quad A \text{ } n \times m \text{ Matrix.}$$

11. Kurven im \mathbb{R}^n

Erinnerung & Ergänzungen:

Def. Stetige Abbildungen $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$
auf einem mehrpunktigen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißen Kurven
im \mathbb{R}^n .

i) $t \in I$ heißt Parameter von x

ii) Bild $x(I) \subset \mathbb{R}^n$ heißt Spur von x

Eine Kurve x ist k -mal (stetig) differenzierbar, falls die
Komponentenabbildungen x_1, \dots, x_n k -mal (stetig) differenzierbar
sind. Die k te Ableitung von x ist

$$x^{(k)}: I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto x^{(k)}(t) := \begin{pmatrix} x_1^{(k)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(k)}(t) \end{pmatrix}$$

i) $\dot{x} := x^{(1)}$ heißt Geschwindigkeit

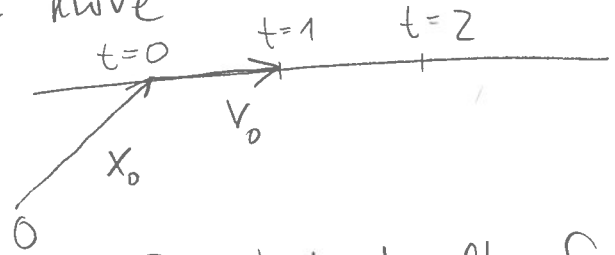
ii) $\dot{x}(t)$ ist der Tangentenvektor der Kurve an $x(t)$

iii) Menge der k -mal stetig differenzierbaren Kurven $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$

Beispiele: 1. $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x_0 + t v_0$ ist für $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^n$

eine beliebig oft differenzierbare Kurve

Spur ist eine Gerade

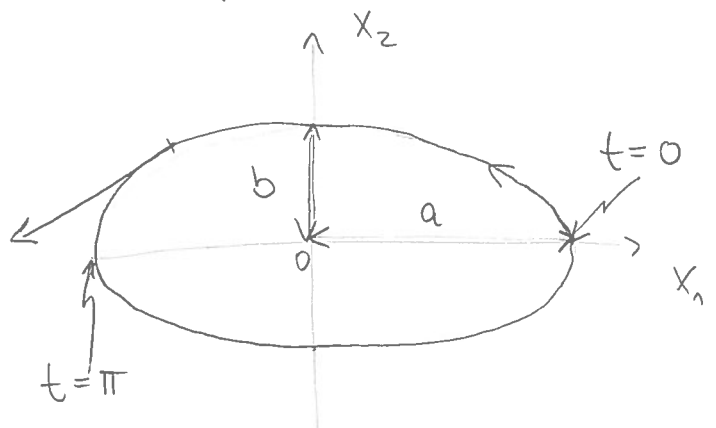


Die Kurve $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x_0 + t^3 v_0$ hat dieselbe Spur, aber eine andere zeitliche Belegung.

2. $x: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$ ist für $a, b > 0$ eine beliebig oft differenzierbare Kurve. Spur ist eine Ellipse mit Halbachsen a, b

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$$

Tangentenvektor

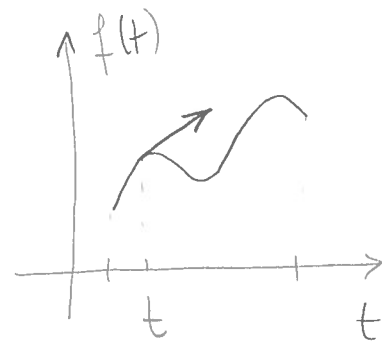


Spezialfall: $a=b$ Kreis

3. Graph einer \mathcal{C}^k -Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist Spur der

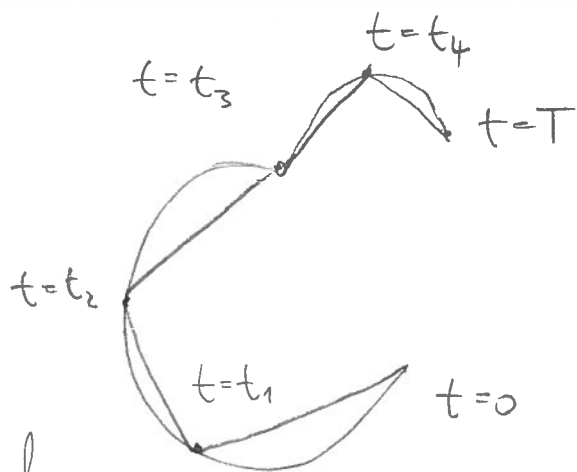
\mathcal{C}^k -Kurve $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

Tangentenvektor $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$



11.1. Bogenlänge

Kurve $x: [a, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$



Längenbestimmung durch Sehnenpolygone:

- Partition ("Unterteilung") $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N = T$
- Zugeordnetes Polygonzug: $Z = Z(t_0, \dots, t_N; x)$
- Länge von Z : $L(Z) := \sum_{n=1}^N |x(t_n) - x(t_{n-1})|$

Bem: Verfeinerung der Partition verlängert Polygonzug.

Def: Länge der Kurve x : $L(x) = \sup_Z L(Z)$
(Supremum über alle zugeordn. Polygonzüge)

Bem: Falls $L(x) < \infty$ heißt $x: [a, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ rektifizierbar.

Es gilt:
$$L(Z) = \sum_{n=1}^N \left| \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} \right| (t_n - t_{n-1})$$



Riemann Summe (*).

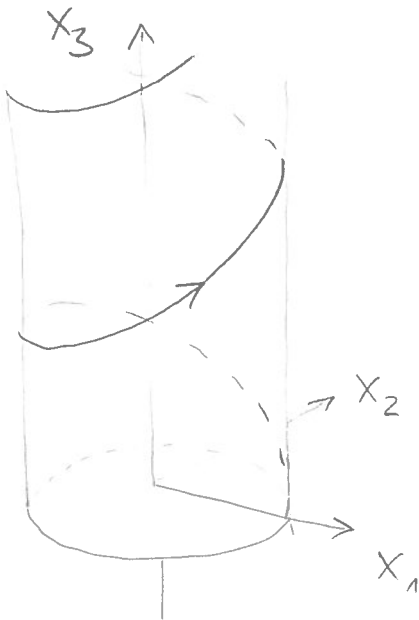
(4)

Satz: Für C^1 -Kurven $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

$$L(x) = \int_I |\dot{x}(t)| dt$$

Beweisidee: Konvergenz der Riemann Summe (*) gegen Integral.

Beispiel: $x: [a, T] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ ct \end{pmatrix}, T, R, c > 0$



Spur ist Schraubenlinie

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ c \end{pmatrix}$$

$$L(x) = \int_0^T \sqrt{R^2 (-\sin t)^2 + R^2 (\cos t)^2 + c^2} dt \\ = \sqrt{R^2 + c^2} T.$$

Bemerkung zur Formel für Bogenlänge von C^1 -Kurven

"Länge = Geschwindigkeit \times Zeit"

11.2. Parameterwechsel

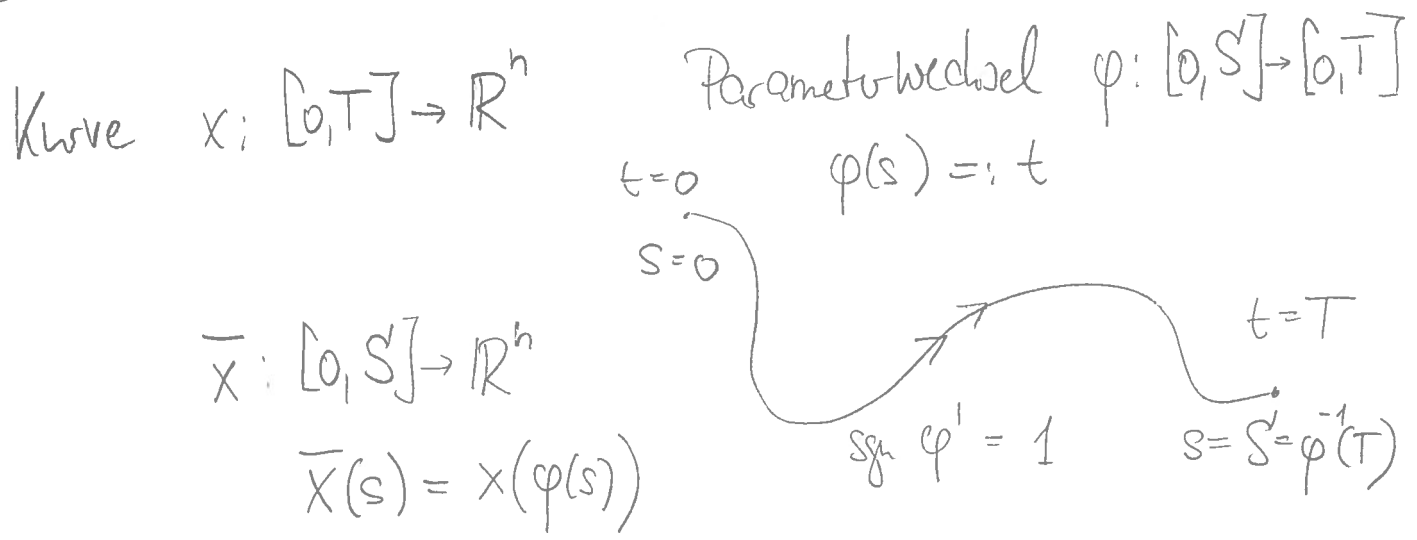
Physikalisch: "Zeittransformationen"

Def Für $I, J \subset \mathbb{R}$ mehrpunktige Intervalle und $k \in \mathbb{N}_0$ heißt $\varphi: I \rightarrow J$ C^k -Parametertransformation, falls φ bijektiv und φ, φ^{-1} k -mal stetig differenzierbar sind.

Entweder / oder:

- φ streng monoton steigend "Ordnungstreu"
 $\text{sgn } \varphi' = +1$
- φ streng monoton fallend "Ordnungsumkehrend"
 $\text{sgn } \varphi' = -1$

Illustration:



Def. Kurven x, \bar{x} heißen äquivalent, falls es eine \mathcal{C}^0 -Parametrisierung φ gibt mit $\bar{x} = x \circ \varphi$

Bemerkungen: 1. Äquivalente Kurven haben dieselbe Spur.

2. Transformation der Tangentialvektoren unter \mathcal{C}^1 -Parametrisierung:

$$\bar{x}(s) = x(\varphi(s)) \Rightarrow \dot{\bar{x}}(s) = \frac{d}{ds} \bar{x}(s) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \dot{x}(\varphi(s)) \varphi'(s)$$

Fazit: Für $t = \varphi(s)$ $\bar{x}(s) = x(t)$ (*)

$$\dot{\bar{x}}(s) = \dot{x}(t) \frac{dt}{ds}$$

3. Transformation der Bogenlänge unter \mathcal{C}^1 -Parametrisierung:

$$L(\bar{x}) = \int_I |\dot{\bar{x}}(s)| ds \stackrel{(*)}{=} \int_I |\dot{x}(\varphi(s))| |\varphi'(s)| ds$$

Subst. $t = \varphi(s)$ $\rightarrow \int_J |\dot{x}(t)| dt = L(x)$

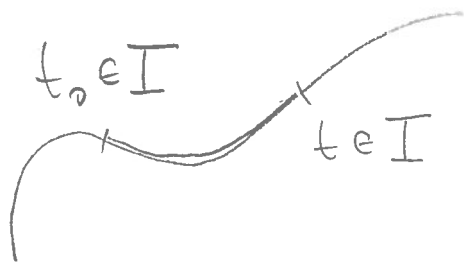
Satz: Für äquivalente Kurven x, \bar{x} gilt

$$L(x) = L(\bar{x})$$

Geometrisch natürliche Parametrisierung einer Kurve $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$

durch Bogenlänge:

$$\sigma: I \rightarrow \sigma(I), t \mapsto \sigma(t) := \int_{t_0}^t |\dot{x}(\tau)| d\tau \quad (**)$$



$$\text{Bem: } \sigma(t) = \begin{cases} L(x|_{[t_0, t]}) & t \geq t_0 \\ -L(x|_{[t, t_0]}) & t \leq t_0 \end{cases}$$

Def: Eine \mathcal{C}^1 -Kurve heißt regulär, falls $|\dot{x}| > 0$

Satz: Ist $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre \mathcal{C}^1 -Kurve, dann wird durch $\varphi^{-1} := \sigma$ eine orientierungstreuere \mathcal{C}^1 -Parametrisierung φ definiert und $\bar{x} := x \circ \varphi$ ist äquivalente Kurve mit $|\dot{\bar{x}}| = 1$ und

$$L(\bar{x}) = \sigma(\sup I) - \sigma(\inf I)$$

Beweisstrategie: $\frac{d\varphi^{-1}(t)}{dt} = \frac{d\sigma(t)}{dt} \stackrel{(**)}{=} |\dot{x}(t)| > 0$, d.h.

$\varphi^{-1} \circ \varphi^1$ ist streng monoton steigend ("orientierungstreu").

Mit (*) und $t = \varphi(\sigma)$:

$$|\dot{\bar{x}}(\sigma)| \stackrel{(*)}{=} |\dot{x}(t)| |\varphi'(\sigma)| = |\dot{x}(t)| \frac{1}{|(\varphi^{-1})'(t)|} = 1$$

Bogenlänge $L(\bar{x}) = L(x)$

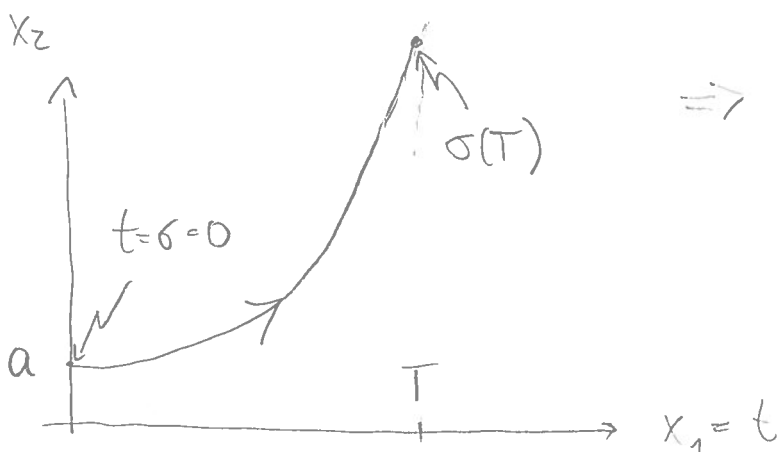
$$= \int_{\inf I}^{\sup I} |\dot{x}(\tau)| d\tau = \int_{t_0}^{\dots} |\dot{x}(\tau)| d\tau \quad \square$$

Beispiel: $x(t) = a \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}, t \in [0, T]$

$$\sigma(t) = \int_0^t |\dot{x}(\tau)| d\tau = a \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2(\tau)} d\tau = a \int_0^t \cosh(\tau) d\tau$$

$$= a \sinh(t) \Rightarrow t = \sinh^{-1}\left(\frac{\sigma}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{x}(\sigma) = x(t(\sigma)) = a \begin{pmatrix} \sinh^{-1}\left(\frac{\sigma}{a}\right) \\ \sqrt{a^2 + \sigma^2} \end{pmatrix}$$



11.3. Geometrische Eigenschaften von Kurven in \mathbb{R}^3

Erinnerung: Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3

Def: Für $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ heißt

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

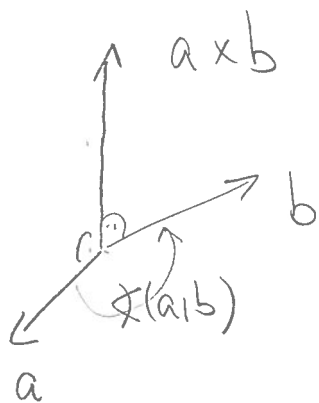
Kreuzprodukt von a, b .

Merksatz & geometrische Interpretation:

$e_j = j$ ter Einheitsvektor im \mathbb{R}^3

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

("Determinante")



$$|a \times b| = |a| |b| \sin(\angle a, b)$$

Rechenregeln: $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

- $a \times b = -b \times a$
- $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$

(1)

Def. Sei $x: [a, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \mapsto x(s)$ eine durch Bogenlänge parametrisierte, reguläre C^2 -Kurve. Man nennt für $|\ddot{x}(s)| > 0$

$$T(s) := \dot{x}(s)$$

Tangentenvektor

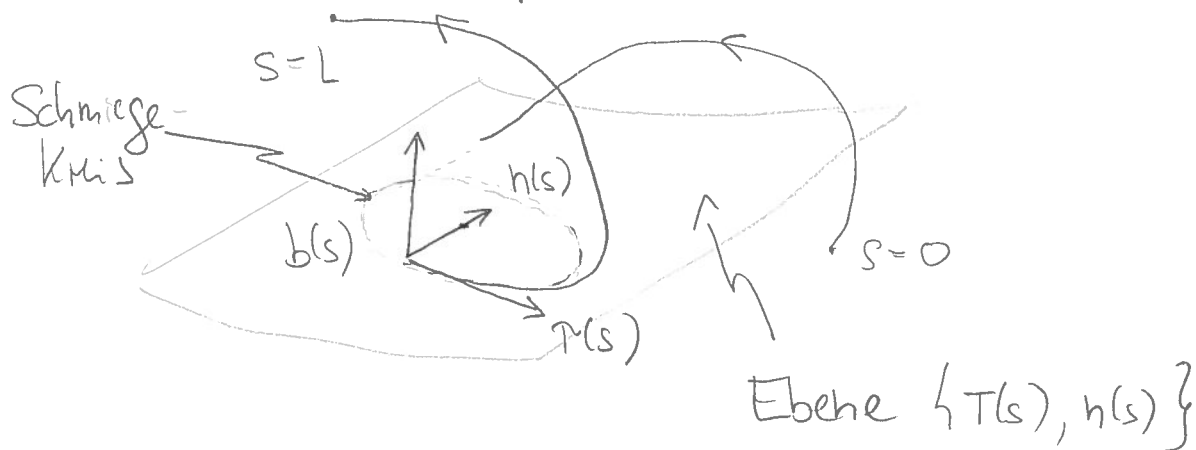
$$n(s) := \frac{\dot{T}(s)}{|\dot{T}(s)|}$$

Hauptnormalevektor

$$b(s) := T(s) \times n(s)$$

Binormalevektor

Geometrische Interpretation & elementare Eigenschaften:



Begleitendes Dreiein $\{T(s), n(s), b(s)\}$

Einhetsvektoren, die paarweise senkrecht stehen

Beweis: $0 = \frac{d}{ds} (T(s) \cdot T(s)) = 2 T(s) \cdot \dot{T}(s)$

$$\Rightarrow T(s) \perp n(s)$$

$\cdot b(s) \perp n(s), b(s) \perp T(s)$ aus Kreuzpr.

Schmiegekreis von x bei s

Krümmung $\kappa(s) := |\dot{T}(s)|$

Radius $R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$

Für reguläre \mathbb{R}^3 -Kurve $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $|\dot{x}(t)| > 0$
lassen sich begleitende Dreibein & Krümmung wie
folgt berechnen:

$$T(t) = \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} \quad n(t) = b(t) \times T(t)$$

$$b(t) = \frac{\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)}{|\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)|}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)|}{|\dot{x}(t)|^3}$$

Beweis: Zentralübung!