....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Σ		

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik 3 für Physiker
(Analysis 2)

Prof. Dr. S. Warzel

4. August 2015, 15:00 – 16:30 Uhr

Hörsaal: ....   Reihe: ....   Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **54 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen   von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Stetigkeit und Differentiation** **(4 Punkte)**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (1 + |x|^{1/3})e^y$. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an:

(a) f ist im Ursprung stetig. ☒ Ja ☐ Nein **[1]**

(b) Die partielle Ableitung $\partial_1 f(0,0)$ ist **[1]**

☐ -1 ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☒ nicht definiert.

(c) Die partielle Ableitung $\partial_2 f(0,0)$ ist **[1]**

☐ -1 ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☒ 1 ☐ nicht definiert.

(d) Wie lautet die totale Ableitung von f im Nullpunkt? **[1]**

☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☒ $Df(0)$ ist nicht definiert

LÖSUNG:

(a) stetig als Kombination stetiger Funktionen, (c) $\partial_2 f(x,y) = f(x,y)$. $f(0,0) = 1$,

(b) $x \mapsto f(x,0) = 1 + |x|^{\frac{1}{3}}$ nicht diffbar bei 0, (d) siehe (b)

2. **Taylorentwicklung** **(6 Punkte)**
Bestimmen Sie die Taylorentwicklung bis zur 3-ten Ordnung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = e^x(1 + x^2 + y^2)^{-1},$$

mit dem Ursprung als Entwicklungspunkt.

$$T_3 f((x,y);(0,0)) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - y^2 - \frac{5}{6}x^3 - xy^2$$

LÖSUNG:

$e^x(1+x^2+y^2)^{-1} = (1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots)(1-(x^2+y^2)+\cdots) = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-x^2-x^3-y^2-xy^2+\cdots$

3. **Extremalstellen** **(11 Punkte)**

Bestimmen Sie mit Begründung die lokalen Maxima von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$.

LÖSUNG:

$0 = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x^2+y^2-1)2x \\ 2(x^2+y^2-1)2y \end{pmatrix} \iff x^2+y^2 = 1 \vee (x,y) = (0,0).$ **[2]**

Dies sind genau die kritischen Punkte, mithin Kandidaten für lokale Extremstellen. **[1]**

Hessematrix: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x^2+4(x^2+y^2-1) & 8xy \\ 8xy & 8y^2+4(x^2+y^2-1) \end{pmatrix}.$ **[2]**

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ negativ definit, also ist $(0,0)$ ein lokales Maximum. **[2]**

Sei nun $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2 = 1$. Dann ist $\det H_f(x,y) = \det \begin{pmatrix} 8x^2 & 8xy \\ 8xy & 8y^2 \end{pmatrix} = 0$, also keine direkte Aussage möglich. **[1]**

Da aber $f(x,y) = 0^2 = 0$ und für alle $\epsilon > 0$ gilt, dass $(1+\frac{\epsilon}{2})(x,y) \in U_\epsilon((x,y))$, wobei $f((1+\frac{\epsilon}{2})(x,y)) = ((1+\frac{\epsilon}{2})^2-1)^2 > 0$ ist, folgt, dass (x,y) kein lokales Maximum sein kann. **[2]**

Somit ist $(0,0)$ das einzige lokale Maximum von f. **[1]**

4. **Umkehrfunktionen** **(6 Punkte)**

Sei $\Psi : (0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\Psi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von Ψ.

$$D\Psi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **[3]**

(b) Ist Ψ ein lokaler Diffeomorphismus? Begründen Sie Ihre Antwort.

LÖSUNG:

(a) s.o.

(b) Ψ ist stetig differenzierbar. **[1]**
Die Jakobi-Matrix ist überall invertierbar, da $\det D\Psi(r,\phi,z) = r > 0$. **[1]**
Nach dem Satz über die Lokale Umkehrfunktion ist Ψ ein also ein lokaler Diffeomorphismus. **[1]**

5. **Implizit definierte Funktionen** **(9 Punkte)**
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + e^{z-1}z^2$.

(a) Beweisen Sie, dass die Gleichung $f(x,y,z) = 4$ im Punkt $(1,1,1)$ lokal nach z auflösbar ist.

Es sei $(x,y) \mapsto g(x,y)$ die dadurch implizit definierte Funktion.

(b) Berechnen Sie $\nabla g(1,1)$.

LÖSUNG:

(a) Es ist $f(1,1,1) = 2 + 1 + 1 \cdot 1 = 4$. **[1]**
f ist stetig differenzierbar **[1]**
mit $\partial_z f(x,y,z) = e^{z-1}(z^2 + 2z)$, $\partial_z f(1,1,1) = 3 \neq 0$. **[2]**
Nach dem Satz über implizite Funktionen ist f also in $(1,1,1)$ lokal nach z auflösbar **[1]**

(b) und es gilt für die Auflösung g

$$Dg(1,1) \overset{[\mathbf{2}]}{=} -\frac{\big(\partial_x f(1,1,1) \quad \partial_y f(1,1,1)\big)}{\partial_z f(1,1,1)} \overset{[\mathbf{1}]}{=} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \text{also } \nabla g(1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \qquad [\mathbf{1}]$$

6. **Vektoranalysis** **(5 Punkte)**
Seien $v, w \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie:

$$\nabla \cdot (v \times w) = w \cdot (\nabla \times v) - v \cdot (\nabla \times w)$$

LÖSUNG:

$$\nabla \cdot (v \times w) \overset{[\mathbf{1}]}{=} \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \partial_i v_j w_k \overset{[\mathbf{1}]}{=} \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \big((\partial_i v_j) w_k + v_j (\partial_i w_k)\big) \overset{[\mathbf{1}]}{=} \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \big((\partial_i v_j) w_k + v_j (\partial_i w_k)\big)$$
$$\overset{[\mathbf{1}]}{=} \sum_{k=1}^{3} w_k \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{kij} \partial_i v_j - \sum_{j=1}^{3} v_j \sum_{i,k=1}^{3} \epsilon_{jik} \partial_i w_k \overset{[\mathbf{1}]}{=} w \cdot (\nabla \times v) - v \cdot (\nabla \times w)$$

7. **Gradientenfelder** **(6 Punkte)**

Gegeben sei das Gradientenfeld $v : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = \dfrac{x}{|x|^{2015}}$.

(a) Geben Sie explizit ein Potenzial $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ an.

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2013|x|^{2013}} \qquad \textbf{[3]}$$

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma v(x) \cdot \mathrm{d}x$ mit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (1-t)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

LÖSUNG:

(a) s.o. (b) $\int_\gamma v(x) \cdot \mathrm{d}x \overset{[1]}{=} \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)) = \Phi(0,1,0) - \Phi(1,0,0) \overset{[1]}{=} 0$, da das Potential nur von der Entfernung zum Ursprung abhängt. **[1]**

8. **Gewöhnliche Differentialgleichungen** **(7 Punkte)**

Gegeben sei $G \in C^1(\mathbb{R})$ mit $G' = g$ und die Differentialgleichung

$$\dot{x} = g(t)x^2.$$

(a) Bestimmen Sie eine lokale Lösung für das zugehörige Anfangswertproblem zu $x(0) = 1$.

$$x(t) = \frac{1}{1 + G(0) - G(t)} \qquad \textbf{[3]}$$

(b) Geben Sie eine Lösung für das zugehörige Anfangswertproblem zu $x(0) = 0$ an.

$$x(t) = 0 \qquad \textbf{[1]}$$

(c) Besitzt das Anfangswertproblem zu $x(0) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, lokal eine eindeutige Lösung? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

LÖSUNG:

(a) Für die Lösung $x(t)$ des AWP gilt $\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_0^t g(t)\mathrm{d}t$, bzw., $-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(0)} = G(t) - G(0)$, bzw. $\frac{1}{x(t)} = 1 + G(0) - G(t)$. (b) s.o.

(c) Nach dem Satz von Picard-Lindelöf haben diese AWPs alle lokal eindeutige Lösungen, denn $F(t,x) = g(t)x^2$ erfüllt in der DGl $\dot{x} = F(t,x)$ überall eine lokale Lipschitz-Bedingung bezüglich x, da $(t,x) \mapsto \partial_x F(t,x) = 2xg(t)$ stetig ist. **[3]**
(Achtung: F ist i.A. nicht stetig differenzierbar, da g nur als stetig bekannt ist.)