. . . .
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I . . . .
Erstkorrektur

II . . . .
Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik 3 für Physiker
(Analysis 2)

Prof. Dr. S. Warzel

4. August 2015, 15:00 – 16:30 Uhr

Hörsaal: . . . . Reihe: . . . . Platz: . . . .

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **54 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von . . . . bis . . . .

Vorzeitig abgegeben um . . . .

Besondere Bemerkungen:

1. **Stetigkeit und Differentiation** **(4 Punkte)**

   Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (1 + |x|^{1/3})e^y$. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an:

   (a) f ist im Ursprung stetig. ☐ Ja ☐ Nein

   (b) Die partielle Ableitung $\partial_1 f(0, 0)$ ist

   ☐ -1 ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ nicht definiert.

   (c) Die partielle Ableitung $\partial_2 f(0, 0)$ ist

   ☐ -1 ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ nicht definiert.

   (d) Wie lautet die totale Ableitung von f im Nullpunkt?

   ☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $Df(0)$ ist nicht definiert

2. **Taylorentwicklung** **(6 Punkte)**

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung bis zur 3-ten Ordnung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \mathrm{e}^x (1 + x^2 + y^2)^{-1},$$

mit dem Ursprung als Entwicklungspunkt.

$T_3 f((x, y); (0, 0)) =$

3. **Extremalstellen** **(11 Punkte)**
Bestimmen Sie mit Begründung die lokalen Maxima von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$.

4. **Umkehrfunktionen** **(6 Punkte)**

Sei $\Psi : (0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\Psi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von Ψ.

$$D\Psi(r,\varphi,z) =$$

(b) Ist Ψ ein lokaler Diffeomorphismus? Begründen Sie Ihre Antwort.

5. **Implizit definierte Funktionen** **(9 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + e^{z-1}z^2$.

(a) Beweisen Sie, dass die Gleichung $f(x, y, z) = 4$ im Punkt $(1, 1, 1)$ lokal nach z auflösbar ist.

Es sei $(x, y) \mapsto g(x, y)$ die dadurch implizit definierte Funktion.

(b) Berechnen Sie $\nabla g(1, 1)$.

6. **Vektoranalysis** **(5 Punkte)**

Seien $v, w \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie:

$$\nabla \cdot (v \times w) = w \cdot (\nabla \times v) - v \cdot (\nabla \times w)$$

7. Gradientenfelder **(6 Punkte)**

Gegeben sei das Gradientenfeld $v : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = \dfrac{x}{|x|^{2015}}$.

(a) Geben Sie explizit ein Potenzial $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ an.

$\Phi(x) =$

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int\limits_\gamma v(x) \cdot \mathrm{d}x$ mit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (1-t)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

8. **Gewöhnliche Differentialgleichungen** **(7 Punkte)**

Gegeben sei $G \in C^1(\mathbb{R})$ mit $G' = g$ und die Differentialgleichung

$$\dot{x} = g(t)x^2.$$

(a) Bestimmen Sie eine lokale Lösung für das zugehörige Anfangswertproblem zu $x(0) = 1$.

$x(t) =$

(b) Geben Sie eine Lösung für das zugehörige Anfangswertproblem zu $x(0) = 0$ an.

$x(t) =$

(c) Besitzt das Anfangswertproblem zu $x(0) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, lokal eine eindeutige Lösung? (Begründen Sie Ihre Antwort!)