TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 3 für Physiker (Analysis 2) MA9203

Sommersemester 2015
Blatt 12
(03.07.2015)

Zentralübung

Z12.1. Strahlungsdämpfung

Ein beschleunigtes geladenes Teilchen wird durch Abstrahlung elektromagnetischer Wellen gebremst. Phänomenologisch wirkt eine Kraft proportional zur dritten Ableitung des Ortes. Im harmonischen Potential lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} = -q + \delta\,\dddot{q}$$

mit $q(t) \in \mathbb{R}$. Dabei beschreibt $\delta > 0$ die Kopplungsstärke des Teilchens an das elektromagnetische Feld.

(a) Eine reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms, $\lambda_1 > \frac{1}{\delta}$, ist bekannt (siehe unten). Bestimmen Sie die übrigen Nullstellen $\lambda_{2,3}$. *Hinweis:* Polynomdivision.

(b) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem an. Geben Sie alle auf $\mathbb{R}^+$ beschränkten Lösungen an.

(c) Die reelle Nullstelle ist $\lambda_1 = \frac{1+q^{2/3}+q^{-2/3}}{3\delta}$ mit $q = \frac{3\sqrt{3}}{2}\delta + \sqrt{1+\frac{27}{4}\delta^2}$. Berechnen Sie jeweils den führenden Term in der Taylorentwicklung von Real- und Imaginärteil von λ_2 für kleine δ? *Hinweis:* Entwickeln Sie $\lambda_1\delta$ bis zur vierten Ordnung in δ.

Z12.2. Implizite Funktionen mittels Differentialgleichungen

Seien $f \in C^2(U \times V)$ mit $U, V \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $\partial_2 f(x,y) \neq 0$ für alle $x \in U$, $y \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass die durch $f(x, g(x)) = 0$ implizit definierte Funktion $g : U \to V$ der Differentialgleichung

$$g'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, g(x))}{\partial_2 f(x, g(x))}$$

genügt.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass diese Differentialgleichung eine eindeutige Lösung $g : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit Anfangswert $g(x_0) = y_0$ besitzt.

(c) Wie lautet die Differentialgleichung im Spezialfall $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Lösen Sie das Anfangswertproblem zu $g(0) = 1$.

Z12.3. Richtungsfeld

Skizzieren Sie das Richtungsfeld von $x' = f(x,t)$ für

(a) $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,t) = \sqrt{t} + x$.

(b) $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,t) = \sqrt{t} + \sqrt{|x|}$.

Erfüllen diese Funktionen eine lokale oder globale Lipschitzbedingung?

Tutoraufgaben

T12.1. Eindeutigkeit von Lösungen

Geben Sie, mit Skizze, alle Lösungen des AWPs $\dot{x} = -|x|^\alpha$, $x(0) = 1$, an, für

(a) $\alpha = 2$, (b) $\alpha = 1$, (c) $\alpha = \frac{1}{2}$.

T12.2. Separierbare Differentialgleichungen

Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

(a) $y'x = 2y$ (b) $y' = \frac{2x}{x^2+1}y$ (c) $y'(y+1)^2 + x^3 = 0$

T12.3. Picard-Iteration

Betrachten Sie das Anfangswertproblem $x' = 1 + x^2$ mit $x(0) = 0$.

(a) Erfüllt das zugehörige Vektorfeld einer lokalen oder globalen Lipschitzbedingung?

(b) Wie lautet die Picard-Abbildung A für das obige Anfangswertproblem? Geben Sie explizit den Definitionsbereich dieser Abbildung an!

(c) Bestimmen Sie für die Startfunktion $x_0(t) = 0$ explizit die dritte Picard-Iterierte $x_3(t) := (A^3 x_0)(t)$.

(d) Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge $A^k x_0$, $k \in \mathbb{N}_0$?

Hausaufgaben

H12.1. Erste Integrale

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: $E \in C^1(U, \mathbb{R})$ ist genau dann entlang jeder Integralkurve von $F \in \mathbb{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ konstant, wenn für alle $x \in U$ gilt $\operatorname{grad} E(x) \perp F(x)$.

H12.2. Separierbare und exakte Differentialgleichungen

Bestimmen Sie jeweils ein erstes Integral und damit Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $\dot{x} = \frac{2tx^2}{t^2+1}$,

(b) $\dot{x} = -\frac{1+2tx+x^2}{t^2+2tx}$ mit dem Anfangswert $x(t_0) = x_0$.

Skizzieren jeweils Sie die Integralkurven.

H12.3. Lineare Differentialgleichung mit zeitabhängiger Inhomogenität

Berechen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax + b(t)$, $x(0) = \binom{1}{0}$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $b(t) = \binom{t}{1}$.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 13.07.2015, bis 12:00 im Briefkasten Keller FMI-Gebäude oder vor Beginn der Zentralübung im PH HS 1