TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 3 für Physiker (Analysis 2) MA9203

Sommersemester 2015
Blatt 11
(26.06.2015)

Tutoraufgaben

T11.1. Parameterintegrale

(a) Seien $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Zeigen Sie, dass $F(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)\mathrm{d}t$ stetig differenzierbar ist mit

$$F'(x) = f(x, h(x))h'(x) - f(x, g(x))g'(x) + \int_{g(x)}^{h(x)} \partial_1 f(x,t)\mathrm{d}t$$

Hinweis: Sie dürfen (ohne Beweis) verwenden, dass für ein stetiges $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die Abbildung $(x, y, z) \mapsto \int_y^z f(x,t)\mathrm{d}t$ stetig ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $F(x) := \int_{-x}^{x} \frac{1 - e^{-xy}}{y}\,\mathrm{d}y$.

T11.2. Beispiele für Lipschitz-Stetigkeit

(a) Gegeben sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$. Für welche $\alpha \geq 0$ ist f Lipschitz-stetig? Geben Sie eine Lipschitz-Konstante an.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$ Lipschitz-stetig ist. Welche Bedingungen müssen A und b erfüllen, damit f eine Kontraktion ist?

T11.3. Banachscher Fixpunktsatz, Fehlerabschätzung.

Sei $f : X \to X$ eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante $L < 1$ auf dem vollständigen metrischen Raum (X, d) und x^* der Fixpunkt von f. Zeigen Sie, dass für die zu $x_0 \in X$ definierte Iteration $x_{k+1} := f(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d(x_k, x^*) \leq \frac{L}{1-L} d(x_{k-1}, x_k)$$

Hausaufgaben

H11.1. Existenz eines Vektorpotentials

Sei $v \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig und $\nabla \cdot v = 0$. Zeigen Sie, dass dann $w(x) := \int\limits_0^1 v(x_0 + t(x - x_0)) \times (x - x_0)t \, \mathrm{d}t$ ein Vektorpotential von v definiert.

HINWEIS: Setze $x_0 = 0$. Überprüfe und verwende: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 v(tx)) = 2tv(tx) + t^2((x \cdot \nabla)v)(tx)$.

H11.2. Lipschitz-Stetigkeit

Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex.

(a) Zeigen Sie: Ist $L := \sup\limits_{x \in U} \|Df(x)\| < \infty$, dann ist f Lipschitz-stetig mit Konstante L.

(b) Warum ist f eingeschränkt auf ein Kompaktum $K \subset U$ stets Lipschitz-stetig?

H11.3. Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung, eindimensional

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion mit $U \subseteq \mathbb{R}$ offen.

(a) Sei $x \in U$ mit $f'(x) \neq 0$. Bestimmen Sie die Position $x' \in \mathbb{R}$ des Schnittpunktes der x-Achse mit der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(x, f(x))$. Sei $x' = F(x)$. Wie lautet die Funktion F und ihre Ableitung?

(b) Sei nun x^* eine Nullstelle von f mit $f'(x^*) \neq 0$. Man zeige, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass die Funktion $F : [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon] \to [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

eine Kontraktion ist. Welches sind die Fixpunkte von F?

(c) Berechnen Sie die ersten 5 Folgenglieder der Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$ für $f(x) = x^2 - 2$ mit geeignetem Startwert x_0.

(d) Finden Sie einen geeigneten Startwert x_0 für das vereinfachte Newtonverfahren und berechnen die ersten Folgenglieder. Was ergibt sich im Vergleich zu (c)?

Hausaufgabenabgabe: Montag, 06.07.2015, bis 12:00 im Briefkasten Keller FMI-Gebäude oder vor Beginn der Zentralübung im PH HS 1