TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 3 für Physiker (Analysis 2) MA9203

Sommersemester 2015
Blatt 9
(12.06.2015)

Zentralübung

Z9.1. Das Achsenkreuz ist keine Mannigfaltigkeit

(a) Das Achsenkreuz $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\}$ ist keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

(b) $X \setminus \{(0,0)\}$ ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

Z9.2. Stereographische Projektion

Wir betrachten die beiden Funktionen $\Phi_\pm : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi_\pm(x) = \left(\frac{2x_1}{1+|x|^2}, \frac{2x_2}{1+|x|^2}, \pm\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} \right).$$

Nach Aufgabe T3.3 ist $\Phi_\pm : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{(0,0,\mp 1)\}$ jeweils ein Homöomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass (Φ_+, Φ_-) einen Atlas von S^2 bildet.

(b) Wie lautet der Kartenwechsel von Φ_+ nach Φ_-?

Z9.3. Der Torus im $\mathbb{R}^4$

Sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_3^2 + x_4^2 - 1 \end{pmatrix}$ und $T := F^{-1}(\{(0,0)\}) \subset \mathbb{R}^4$

(a) Zeigen Sie, dass T eine 2–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

(b) Geben Sie einen Atlas von T an.

(c) Geben Sie für $p \in T$ explizit T_pT und N_pT an.

Tutoraufgaben

T9.1. Nulldimensionale und n-dimensionale C^α–Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Ein Punkt $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *isoliert* in M, wenn für ein $\epsilon > 0$ gilt, dass $M \cap U_\epsilon(x) = \{x\}$. Eine Menge M die nur aus isolierten Punkten besteht, heißt *diskret*. Für beliebiges α gilt:

(a) Die n-dimensionalen C^α–Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind die offenen Mengen.

(b) Die nulldimensionalen C^α–Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind die diskreten Mengen.

T9.2. Hyperboloid

Für $c \in \mathbb{R}$ sei $H_c := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + c\}$.
Zeigen Sie:

(a) Für $c \neq 0$ ist H_c eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

(b) H_0 ist keine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

T9.3. Kegel

Gegeben ist die Menge $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0,\ z^2 = x^2 + y^2\}$.

(a) Begünden Sie, dass M eine 2-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Skizzieren Sie M.

(c) Geben sie zu $p \in M$ den Tangentialraum T_pM und den Normalenraum N_pM an.

Hausaufgaben

H9.1. Rotationsflächen

Es seien I ein offenes Intervall und $r : I \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in I,\ x^2 + y^2 = (r(z))^2\}$$

eine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

H9.2. Graph einer Funktion

Es sei $U' \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : U' \to \mathbb{R}^k$ eine Abbildung. Der Graph von g ist gegeben durch

$$M := \{(x, g(x)) \,|\, x \in U'\} \subset \mathbb{R}^{n+k}.$$

Finden Sie eine hinreichende Bedingung dafür, dass M eine C^α-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+k}$ ist. Welche Dimension hat M in diesem Fall?

H9.3. Ein Torus im $\mathbb{R}^3$

Zeigen Sie, dass der Torus

$$T = \left\{((R + r\cos\varphi)\cos\theta, (R + r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \varphi, \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

für feste $0 < r < R$ eine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 22.06.2015, bis 12:00 im Briefkasten Keller FMI-Gebäude oder vor Beginn der Zentralübung im PH HS 1