TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 3 für Physiker (Analysis 2) MA9203

Sommersemester 2015
Blatt 5
(15.05.2015)

Zentralübung

Z5.1. Multinomische Formel

Für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}_0^n$ setzen wir $|p| := p_1 + \cdots + p_n$, $p! := p_1! \cdots p_n!$ und für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $x^p := x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$.

(a) Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist $\{q \in \mathbb{N}_0^{n+1}, |q| = k\} = \{(p_1, \ldots, p_n, l) \in \mathbb{N}_0^{n+1} : p \in \mathbb{N}_0^n, |p| = k-l\}$.

(b) $|\{p \in \mathbb{N}_0^n, |p| = k\}| = \binom{n+k-1}{k}$.

(c) Für $p \in \mathbb{N}_0^n$, $|p| = k$, ist $|\{f : \{1, .., k\} \to \{1, .., n\} \ : \ |f^{-1}(j)| = p_j, \, j = 1, \ldots, n\}| = \frac{k!}{p!}$.

(d) Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist $(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum\limits_{\substack{p \in \mathbb{N}_0^n \\ |p|=k}} \frac{k!}{p!} x^p$ (mit Induktion über n).

Z5.2. Höhere Richtungsableitungen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar, $a, v \in \mathbb{R}^2$. Drücken Sie die k-te Richtungsableitung $\partial_v^{(k)} f(a)$ durch die partiellen Ableitungen von f aus, $k = 1, 2, 3$.

Tutoraufgaben

T5.1. Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0, \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$

(a) Berechnen Sie $\partial_1 f, \partial_2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass beide Funktionen stetig sind.

(b) Berechnen Sie $\partial_1 \partial_2 f, \partial_2 \partial_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass beide Funktionen nur auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ übereinstimmen.

T5.2. Kurven entlang Höhenlinien skalarer Funktionen

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $x : [a, b] \to U$ eine Kurve. Man zeige:
$\nabla f(x(t)) \perp \dot{x}(t)$ für alle $t \in [a, b]$, genau dann, wenn $f(x(t)) = \text{const}$ für alle $t \in [a, b]$.

T5.3. Mittelwertsatz der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$.

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x, y \in U$, so dass auch die Verbindungsstrecke $\lambda x + (1 - \lambda) y \in U$ für alle $\lambda \in [0, 1]$. Dann gibt es ein $\lambda \in [0, 1]$, so dass für $z := \lambda x + (1 - \lambda) y$ gilt: $f(y) - f(x) = \nabla f(z) \cdot (y - x)$.

Hausaufgaben

H5.1. Höhenlinien und Gradienten

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$.

(a) Skizzieren Sie $\operatorname{grad} f$ und die Höhenlinien von f.

(b) Bestimmen Sie die Tangente an die Höhenlinie durch den Punkt $(x_0, y_0) \neq 0$ und zeigen Sie, dass sie senkrecht auf dem Gradienten an diesem Punkt steht.

(c) Geben Sie Lösungen des AWP $\binom{\dot{x}}{\dot{y}} = \operatorname{grad} f(x, y)$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ an und skizzieren Sie die Spur dieser Kurve.

H5.2. Eine differenzierbare Funktion, die nicht stetig partiell differenzierbar ist

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \neq 0$, $f(0, 0) = 0$. Zeigen sie, dass f (total) differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.

Wegen Pfingsten: Abgabe der Hausaufgaben bis **Freitag, 22.5.**, zu Beginn der Vorlesung oder bis 12:00 im Briefkasten, Keller FMI-Gebäude.