TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 3 für Physiker (Analysis 2) MA9203

Sommersemester 2015
Blatt 3
(01.05.2015)

Zentralübung

Z3.1. Urbilder stetiger Funktionen

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$.

(a) Dann ist äquivalent:
  (i) f ist stetig.
  (ii) Für jedes offene $V \subset Y$ ist $f^{-1}(V)$ offen.
  (iii) Für jedes abgeschlossene $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(b) Finden sie Beispiele für
  (i) eine offene Menge, deren stetiges Bild nicht offen ist.
  (ii) eine abgeschlossene Menge, deren stetiges Bild nicht abgeschlossen ist.
  (iii) eine kompakte Menge, deren stetiges Urbild nicht kompakt ist.

(c) Warum sind die Höhenlinien einer topographischen Karte immer abgeschlossene Mengen? Was gilt für den Bereich zwischen zwei Höhenlinien?

Z3.2. Die Abstandsfunktion ist stetig.

Die Abstandsfunktion $d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ eines metrischen Raumes (M, d) ist stetig, d.h., sind (x_n) und (y_n) zwei in M konvergente Folgen, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d\big(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\big)$$

Z3.3. Stetige Funktionen auf Kompakta sind gleichmäßig stetig.

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $D \subset X$ kompakt und $f : D \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Tutoraufgaben

T3.1. Schachtelung kompakter Mengen

Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Folge von nichtleeren Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M heißt Schachtelung, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_{n+1} \subset A_n$. Der Durchschnitt einer Schachtelung ist $A_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(a) Man zeige: Sind die A_n alle kompakt, so ist A_∞ nichtleer.

(b) Geben Sie ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$ bei dem alle A_n abgeschlossen sind und $A_\infty = \emptyset$.

(c) Geben Sie ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$ bei dem alle A_n beschränkt sind und $A_\infty = \emptyset$.

T3.2. Durchschnitte kompakter und abgeschlossener Mengen

Sei (M, d) ein metrischer Raum $K \subset M$ kompakt und $A \subset M$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass $A \cap K$ kompakt ist.

T3.3. Stereographische Abbildung

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(X,Y) = \left(\frac{2}{1+X^2+Y^2} X, \frac{2}{1+X^2+Y^2} Y, \frac{1-X^2-Y^2}{1+X^2+Y^2} \right)$$

heißt stereographische Abbildung. Zeigen Sie:

(a) f ist stetig und $f(\mathbb{R}^2) \subset S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist stetig.

Hausaufgaben

H3.1. Kompakte Mengen sind beschränkt

Man zeige: Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist beschränkt.

H3.2. Abstand eines Punktes von einer Menge

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer. Der Abstand von $x \in \mathbb{R}^n$ zur Menge A ist definiert als

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{|x-y| \mid y \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{dist}(x, A)$ stetig ist.

(b) Ist $x \notin A$, so gibt es ein $y \in \partial A$ mit $|x-y| = \operatorname{dist}(x, A)$.

H3.3. Stetigkeit der Umkehrfunktion

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $D \subset X$ kompakt und $f : D \to Y$ stetig und injektiv. Dann ist $f^{-1} : f(D) \to D$ stetig. HINWEIS: Z3.1(c), T3.2.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 11.05.2015, bis 12:00 im Briefkasten Keller FMI-Gebäude oder vor Beginn der Zentralübung im PH HS 1