TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 3 für Physiker (Analysis 2) MA9203

Sommersemester 2015
Blatt 2
(24.04.2015)

Zentralübung

Z2.1. Parameterinvarianz des Kurvenintegrals

Für die C^1-Kurve $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine C^1-Parametertransformation, $\tilde{x} = x \circ \phi$. Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, so gilt

$$\int_{\tilde{x}} F(y) \cdot \mathrm{d}y = (\operatorname{sgn} \phi') \int_{x} F(y) \cdot \mathrm{d}y$$

Z2.2. Das Innere und der Abschluss

Sei (M,d) ein metrischer Raum, $A \subset M$.

(a) $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$.

(b) Ist A offen, so ist $A = \overset{\circ}{A}$.

(c) Das Innere von A ist offen.

(d) Ist A abgeschlossen, so ist $A = \overline{A}$.

(e) Der Abschluss von A ist abgeschlossen.

(f) ∂A ist abgeschlossen.

Z2.3. Charakterisierung abgeschlossener Mengen

Sei (M,d) ein metrischer Raum, $A \subset M$.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die gegen $x \in M$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $x \in \overline{A}$.

(b) $\overline{A} = \left\{ x \in M \,|\, \text{es gibt eine Folge } a : \mathbb{N} \to A \text{ mit } \lim_{n\to\infty} a_n = x \right\} =: \mathrm{GW}(A)$, die Menge der Grenzwerte von A.

Tutoraufgaben

T2.1. Ein einfaches Kurvenintegral

Berechnen sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $F(x,y,z) = (-y,x,z)$ entlang einer Schraubenlinie konstanter Steigung um die z-Achse, die von $(1,0,0)$ nach $(1,0,2\pi)$ läuft.

T2.2. Beispiele für Inneres, Abschluss und Rand

Geben Sie das Innere, den Abschluss und den Rand folgender Mengen an und begründen Sie kurz.

(a) $M = (-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

(b) $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| \le 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(c) $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

T2.3. Stetigkeit

(a) Seien $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:
$f + g$ und $f \cdot g$ sind stetig, $\frac{f}{g}$ ist stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^m$, in dem $g(x) \neq 0$.

(b) Seien (M_i, d_i), $i = 1, 2, 3$, metrische Räume und $f : M_2 \to M_3$, $g : M_1 \to M_2$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $f \circ g : M_1 \to M_3$ stetig ist.

(c) Sei $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Zeigen Sie, dass $[a, b] \ni t \mapsto F(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Hausaufgaben

H2.1. Beispiele für Kurvenintegrale

Wir betrachten drei Kurven im $\mathbb{R}^2$ von $A = (0, 1)$ nach $B = (1, 2)$,

- γ_1 ist die direkte Verbindung von A nach B,
- γ_2 ist der Streckenzug von A über $(1, 1)$ nach B,
- γ_3 verläuft längs der Parabel $y = 1 + x^2$.

Berechnen Sie jeweils die Kurvenintegrale entlang γ_1, γ_2, γ_3 für die Vektorfelder

(a) $F_1(x, y) = \binom{x^2 - y}{x + y^2}$, (b) $F_2(x, y) = \binom{x^2 + y}{x + y^2}$.

H2.2. Vereinigung und Durchschnitt von offenen und abgeschlossenen Mengen.

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

(a) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen:
Sei I eine beliebige Menge und zu jedem $i \in I$ sei $A_i \subset M$ offen. Dann ist $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ offen.

(b) Endliche Schnitte offener Mengen sind offen:
Sei I eine endliche Menge und zu jedem $i \in I$ sei $A_i \subset M$ offen. Dann ist $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ offen.

(c) Wie lauten die analogen Aussagen für abgeschlossene Mengen?

(d) Geben sie je ein Beispiel dafür an, dass der Schnitt abzählbar vieler offener Mengen nicht wieder offen zu sein braucht und dass die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen nicht wieder abgeschlossen zu sein braucht.

H2.3. Unstetigkeitsstellen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq 0 \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$$

(a) Warum ist f stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

(b) Zeigen Sie, das f im Nullpunkt nicht stetig ist.
Hinweis: Bestimmen Sie y_n, so dass $f(x_n, y_n)$ für $x_n = \frac{1}{n}$ konstant ist.

(c) Zeigen Sie, dass nicht nur $f(\cdot, y)$ und $f(x, \cdot)$ sondern auch $t \mapsto f(t, \alpha t + \beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 4.05.2015, bis 12:00 im Briefkasten Keller FMI-Gebäude oder vor Beginn der Zentralübung im PH HS 1