Mathematik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 9

Notiztitel 17.06.2013

Probeklausur: 24.6. Mo 12:00 pünktlich

Hilfsmittel: 1 Din-A4 Blatt

Dauer 50 min

Zählt zum Bonus dazu! (50% 2 Klausuraufg $\hat{=}$ 1 HA)

Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist m-dim Untermannigfaltigkeit (hier C^1),
genau dann, wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Ugb $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x und einen Diffeomorphismus $H: U \to H(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$H(M \cap U) = (\mathbb{R}^m \times \underbrace{\{0\}}_{\subseteq \mathbb{R}^{n-m}}) \cap H(U)$$

Äquivalent dazu:

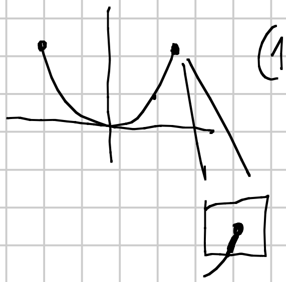
- M ist lokal Nullstellenmenge einer regulären Abbildung
- M ist lokal der Graph einer C^1-Funktion

"M ist lokal ...." bedeutet

"Zu jedem $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung U, so dass $M \cap U$ .... ist"

Bsp: 1: $f(x) = x^2$ $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$. $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in [-1,1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$

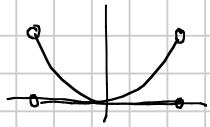
ist keine (1dim) UMF des $\mathbb{R}^2$



$(1,1)\in\mathbb{R}^2$ besitzt keine offene Ugb $U\subseteq\mathbb{R}^2$, auf der $G_f\cap U$ als Graph dargestellt werden kann.

2\. aber für $g: \overset{]-1,1[}{\underbrace{(-1,1)}_{\subseteq\mathbb{R}^2}}\to\mathbb{R}$ $g(x)=x^2$ ist G_g eine UMF

Begr. für jedes $(x,y)\in G_g$ ist $U:=(-1,1)\times\mathbb{R}$ offene Ugb und $G_g\cap U=G_g$



Äußere Karte? Leichter ist es i.A., das Inverse einer äußeren Karte anzugeben

$$\phi: U\to U \qquad \phi(x,y)=(x,g(x)+y)$$

$$\phi((-1,1)\times\{0\})=G_g \quad \text{bijektiv, Diffeom.}$$

$H:=\phi^{-1}$ ist äußere Karte: $H(x,y)=(x,y-g(x))$

$$H(G_g)=(-1,1)\times\{0\}$$

(G_g ist Nullstellenmenge der regulären Funktion:

$F(x,y)=g(x)-y$ $\quad J_F(x,y)=(g'(x)\ \ -1)\neq 0$ hat Rang 1)

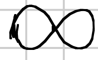
Bsp: Cassinische Kurven:

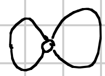
$$h(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$$

Höhenlinien $h(x,y) = c \in \mathbb{R}$. Sind das UMFn?

$$J_h(x,y) = \left(4x(x^2+y^2-1) \quad 4y(x^2+y^2+1)\right)$$

$J_h(x,y) = (0 \ 0)$ für $x=0, y=0$: $h(0,0)=0 \Rightarrow 0$ kein regulärer Wert

In der Tat ist $h^{-1}(\{0\})$ keine UMF: 

Aber $h^{-1}(\{0\}) \setminus \{(0,0)\}$ ist eine UMF: 

warum? z.B. 0 ist regulärer Wert von $h|_{\underbrace{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}_{\text{offen}}}$

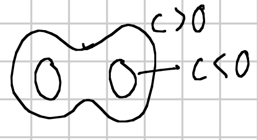
oder für $x^2+y^2=1$ und $y=0$: $h(\pm 1, 0) = -1$

$\Rightarrow -1$ kein regulärer Wert

$$h^{-1}(\{-1\}) = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\}$$ ist 0-dimensionale UMF

D.h. für $c > -1, c \neq 0$ ist c regulärer Wert von h

$\Rightarrow h^{-1}(\{c\})$ ist 1-dim UMF des $\mathbb{R}^2$



Tangentialräume

M m-dim UMF des $\mathbb{R}^n$, $x\in M$

$$T_xM = \{ v\in\mathbb{R}^n \mid \exists \gamma \in C^1((-1,1),M) : v=\dot\gamma(0), \gamma(0)=x\}$$

ist m-dim UVR des $\mathbb{R}^n$.

Anschaulich ist der affine Raum $x+T_xM$ die Tangential„ebene" (für $m=2$) an M im Punkt x.

Wie bekommt man eine Basis des Tangentialraums T_xM?

1. Ist $M=f^{-1}(\{y\})$ Urbild des regulären Wertes $y\in\mathbb{R}^{n-m}$ von $f\in C^1(\underbrace{U}_{\subseteq\mathbb{R}^n},\mathbb{R}^{n-m})$, so stehen $\nabla f_1(x),\dots,\nabla f_{n-m}(x)$ senkrecht

   auf $T_xM = \mathrm{Kern}[\underbrace{f'(x)}_{\mathbb{R}^{n-m}\leftarrow\mathbb{R}^n}]$

   Mit $A=J_f(x)$: Löse $Av=0$ $\qquad \boxed{\qquad\quad}\begin{pmatrix} v \end{pmatrix}=0$

Geht das expliziter:

Äußere Karten bzw. ihre Inversen, sind dazu sehr nützlich:

Ist $\phi: U\subseteq\mathbb{R}^n \to U'\subseteq\mathbb{R}^n$ mit $\phi((\mathbb{R}^m\times\{0\})\cap U)\subseteq M$ lokaler Diffeomorphismus ist, so bilden $\partial_1\phi(u),\dots,\partial_m\phi(u)$ eine Basis von T_xM für $x=\phi(u)$

Bsp: Sphäre $S^2=\{x^2+y^2+z^2=1\}\subseteq\mathbb{R}^3$ ist 2 dim UMF

$$\phi:(\vartheta,\varphi,r)\mapsto\begin{pmatrix}r\sin\vartheta\cos\varphi\\ r\sin\vartheta\sin\varphi\\ r\cos\vartheta\end{pmatrix}\quad \text{für } \vartheta\in(0,\pi)$$

Nord- und Südpol $T_{N/S}S^2=\mathbb{R}^2\times\{0\}$

Lorentz-Boost

Hier: $O(1,1)=\{X\in\mathbb{R}^{2\times2}\mid X\mu X^T=\mu\}$, $\mu=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ist eindim. UMF des $\mathbb{R}^{2\times2}$.

$$F(X)=X\mu X^T\in\underbrace{\mathbb{R}^{2\times2}_s}_{3\,\text{dim}}\qquad F:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}_s$$

$$F'(X)(\Delta)=\Delta\mu X^T+X\mu\Delta^T$$

z.z. $F'(X):\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}_s$ ist surjektiv.

Sei $A\in\mathbb{R}^{2\times2}_s$. Beh: Für $\Delta=\frac{1}{2}A(X^{-1})^T\mu$ gilt $F'(X)(\Delta)=A$

$\left(\frac{1}{2}A(X^{-1})^T\mu\right)\mu X^T+X\mu\left(\frac{1}{2}A(X^{-1})^T\mu\right)^T=A$, warum ist $X\in O(1,1)$ invertierbar?

$\Rightarrow F^{-1}(\{\mu\})$ ist eine 1dim UMF.

Tangentialraum bei der Einheitsmatrix $X=\mathbb{1}\in O(1,1)$

$$T_{\mathbb{1}}O(1,1)=\text{Kern } F'(\mathbb{1})=\{\Delta\in\mathbb{R}^{2\times2}\mid F'(\mathbb{1})(\Delta)=0\}$$

$$\Delta\mu+\mu\Delta^T=0$$

Lsg.: $=\text{span}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{B}\right\}$ $\boxed{\frac{d}{d\alpha}e^{\alpha B}=Be^{\alpha B}=e^{\alpha B}B}$

Bem $e^{\alpha B}=\begin{pmatrix}\sinh\alpha&\cosh\alpha\\ \cosh\alpha&\sinh\alpha\end{pmatrix}\in O(1,1)$ sind Lorentz-Boosts