Mathematik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 8

Notiztitel 10.06.2013

Lokale Umkehrbarkeit, Kugelkoordinaten

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{matrix} =x \\ =y \\ =z \end{matrix}$$

orthogonale Koord. transf.

auf $\mathbb{R}^3$ kein Diffeom.

$$\partial\phi(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_r\phi \perp \partial_\vartheta\phi \perp \partial_\varphi\phi \quad \text{paarw. orthogonal}$$

$$\|\partial_r\phi\|=1 \qquad \|\partial_\vartheta\phi\|=r \qquad \|\partial_\varphi\phi\| = r\sin\vartheta$$

$r, \sin\vartheta \neq 0$

$$\Rightarrow \left(\partial\phi(r,\vartheta,\varphi)\right)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} \end{pmatrix} \partial\phi(r,\vartheta,\varphi)\right]^T \quad (B \text{ orthogonal} \Rightarrow B^{-1} = B^T)$$

$$\text{denn } \partial\phi^T \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{r^2} & \\ & & \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} \end{pmatrix} \partial\phi = \begin{pmatrix} \underset{=1}{\langle\partial_r\phi,\partial_r\phi\rangle} & \underset{=0}{\langle\partial_r\phi,\partial_\vartheta\phi\rangle} & 0 \\ 0 & \underset{=1}{\frac{1}{r^2}\langle\partial_\vartheta\phi,\partial_\vartheta\phi\rangle} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$1 = \det\partial\phi^T \cdot \frac{1}{r^4\sin^2\vartheta}\det\partial\phi \Rightarrow \det\partial\phi = r^2\sin\vartheta \quad \forall r,\vartheta,\varphi\in\mathbb{R}^3$$

ϕ ist lokal invertierbar g.d.w. $r\neq 0, \sin\vartheta\neq 0$

$$\partial\phi^{-1}(\phi(r,\vartheta,\varphi)) = \left(\partial\phi(r,\vartheta,\varphi)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \frac{1}{r}\cos\vartheta\cos\varphi & +\frac{1}{r}\cos\vartheta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\vartheta \\ -\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta} & 0 \end{pmatrix}$$

Φ ist C^∞-Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^+ \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi)$, die Umkehrfunktion Φ^{-1} wird explizit eigentlich nie benötigt:

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \arg(x+iy) \end{pmatrix}$$

In der Physik:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r \cos\vartheta \end{aligned} \qquad \text{bzw} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Bsp $\quad \frac{\partial x}{\partial r} = \sin\vartheta \cos\varphi = (J\Phi)_{1,1} \qquad x = \tilde{x}(r,\vartheta,\varphi) = \Phi_1(r,\vartheta,\varphi)$

$\qquad r = \tilde{r}(x,y,z)$

$\quad \frac{\partial r}{\partial x} \neq \frac{1}{\sin\vartheta\cos\varphi}$ Vielmehr $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} = (J\Phi^{-1})_{1,1} = \left[(J\Phi)^{-1}\right]_{1,1} = \sin\vartheta\cos\varphi$

Anmerkungen zum Satz über implizite Funktionen

Sei $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear, $b \in \mathbb{R}^m$. Wann kann man die Gleichung $f(\underset{\in \mathbb{R}^n}{x}, \underset{\in \mathbb{R}^m}{y}) = b$ nach y auflösen (m Gleichungen mit n+m Unbek.)

Zunächst $m=1$: $f(x,y) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} y = b \in \mathbb{R}$

$\qquad (\alpha_1 \cdots \alpha_n \mid \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{1\times(n+1)}$ darstellende Matrix von f

Für $\alpha_{n+1} \neq 0$ ist

$$y = \frac{1}{\alpha_{n+1}}(b - \alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_n x_n) = \tilde{y}(x), \quad \tilde{y}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

D.h. $f(x, \tilde{y}(x)) = b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ $\qquad X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$

Insbesondere ist

$$J\tilde{y}(x) = -\frac{1}{\alpha_{n+1}}(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = -\frac{J_{X,f}(x, \tilde{y}(x))}{\underbrace{\partial_{n+1}}_{(1\times 1)\ni J_{Y,f}} f(x, \tilde{y}(x))}.$$

Für bel. $m \in \mathbb{N}$

$$A = (B \,\vdots\, C)$$

$$\mathbb{R}^m \ni f(x,y) = \underbrace{A}_{m\times(n+m)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underbrace{B}_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \underbrace{C}_{m\times m} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$m\ \underbrace{\boxed{\quad A \quad}}_{n+m} = \underbrace{\boxed{B}}_{n}\underbrace{\boxed{\ C\ }}_{m}$$

$$f(x,y) = b \in \mathbb{R}^m \iff Bx + Cy = b$$

Um nach y aufzulösen muss C invertierbar sein:

$$y = C^{-1}(b - Bx) = \tilde{y}(x) \qquad \tilde{y}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

und f.a. $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $f(x, \tilde{y}(x)) = b$ $\qquad X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$

$$\underbrace{J\tilde{y}(x)}_{m\times n} = -\underbrace{\left(J_{Y,f}(x, \tilde{y}(x))\right)^{-1}}_{m\times m} \underbrace{J_{X,f}(x, \tilde{y}(x))}_{m\times n}$$

Zusammengefasst: Ist $J_{Y,f}(x,y) = C$ invertierbar, so ist

$$\underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid f(x,y) = b\}}_{\substack{\text{Lösungsmenge der Gl. } f(x,y)=b \\ \text{implizit definierte Teilmenge des } \mathbb{R}^{n\times m}}} = \underbrace{\{(x, \tilde{y}(x)) \in \mathbb{R}^{n\times m} \mid x \in \mathbb{R}^n\}}_{\substack{\text{explizit bestimmte Lösungsmenge} \\ \text{Parametrisierung als Graph von } \tilde{y}}} = \text{Graph } \tilde{y}$$

Mnemotechnik:

$f(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^2$. Löse $f(a,b,c,d,e) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach b, e auf:

Kurzschreibweise:

$$\partial_{(a,c,d)} f = \frac{\partial f}{\partial(a,c,d)} = \frac{\partial \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}}{\partial(a,c,d)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_a f_1 & \partial_c f_1 & \partial_d f_1 \\ \partial_a f_2 & \partial_c f_2 & \partial_d f_2 \end{pmatrix}}_{2\times 3}$$

Lokales Auflösen ergibt $\tilde{b}(a,c,d), \tilde{e}(a,c,d)$ und es gilt, falls bei (a^*, c^*, d^*) definiert

$$\partial_{\begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{e} \end{pmatrix}} (a^*, c^*, d^*) = \underbrace{\frac{\partial \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{e} \end{pmatrix}}{\partial(a,c,d)}}_{2\times 3} \Bigg|_{(a^*, c^*, d^*)} = - \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial(b,e)}}_{2\times 2} \right)^{-1} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial(a,c,d)}}_{2\times 3} \Bigg|_{\text{bei } (a^*, b^*, c^*, d^*, e^*)}$$

$b^* = \tilde{b}(a^*, c^*, d^*)$

$e^* = \tilde{e}(a^*, c^*, d^*)$

Anwendung: Thermodynamik

Zustandsgleichung $F(p, V, T) = 0$

p Druck, V Volumen, T Temperatur alle > 0

z.B. ideales Gas $F(p,V,T) = pV - RT$

$F(p,V,T) = 0 \Leftrightarrow pV = RT$ bestimmt eine (gekrümmte) Fläche in $(\mathbb{R}^+)^3$

Thermodynamische Fkten: $\tilde{p}(V,T) = \frac{RT}{V}$

$\tilde{V}(p,T) = \frac{RT}{p}$

$\tilde{T}(p,V) = \frac{pV}{R}$

man schreibt $\frac{\partial V}{\partial p} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ für $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial p} = \partial_1 \tilde{V} = -\frac{RT}{p^2}$

isotherme Kompressibilität

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad \text{für} \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial T} = \partial_2 \tilde{V} = \frac{R}{p}$$

Allgemein: $F(p, V, T) = 0$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial p}(p,T) = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}(p,V,T)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial p}(p,V,T)\Bigg|_{V=\tilde{V}(p,T)}$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial T}(p,T) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial T}(p,V,T)}{\frac{\partial F}{\partial V}(p,V,T)}\Bigg|_{V=\tilde{V}(p,T)}$$

$$F\left(p, \tilde{V}(p,T), T\right) = 0 \quad \forall p,T \text{ wo definiert}$$