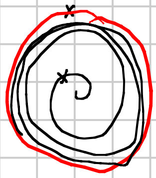
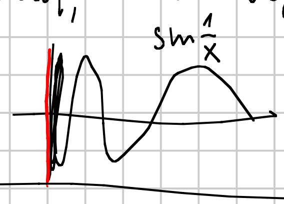
Mathematatik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 3

Notiztitel 06.05.2013

Bemerkung (ZÜ 2) Zusammenhang

$\{0\} \cup \{ e^{t(1+i)} \mid t \in \mathbb{R} \}$  ist wegzush.

$\{|z|=1\} \cup \{ e^{ti - \frac{1}{t}} \mid t \in \mathbb{R}^+ \}$  zush, aber nicht wegzush.



Klausur: 6.8.2013 15:00–16:30

Stoff: Inhalt der Vorlesung, der Übungen, der Hausaufgaben

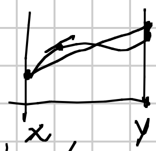
Hilfsmittel: Ein selbsterstelltes DinA4 Blatt.

Banachscher Fixpunktsatz:

Bem: Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ ein Gebiet (d.h. ein offenes Intervall). $F: U \to \mathbb{R}$ diffbar und $\sup_{x \in U} |f'(x)| =: L$. Dann ist F lipschitz stetig mit Konstante L

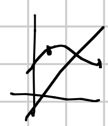
Bew: $x, y \in U$. ohne Einschränkung (oE)

Hauptsatz: $|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y F'(t)\,dt \right| \leq \int_x^y |F'(t)|\,dt \leq L|y-x|$ falls F C^1



MWS (d. Diff) oE $f(x) < f(y)$

Ann $f(y) - f(x) > L(y-x) \overset{MWS}{\Rightarrow} \exists \xi \in [x,y]$ mit $f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} > L$ ↯



Bem $U \subseteq \mathbb{R}$ Gebiet. $F: U \to \mathbb{R}$ diffbar mit Fixpunkt.
$|F'(x)| \leq L < 1$ f.a. $x \in U$. Dann hat F genau einen Fixpunkt x^* und

f.a. x_0 mit $2x^* - x_0 \in U$ gilt für $x_{n+1} = F(x_n)$: $x_n \to x^* \in \mathbb{R}$

Bew: Banachscher Fixpunktsatz für $F|_{B_{|x_0 - x^*|}(x^*)}$

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ableitung in $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$f'(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, bzw $f'(x_0) \in B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Jacobimatrix $J_f(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

partiellen Ableitungen $\partial_i f_j(x_0) = \partial_{x_i} f(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_0) \in \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$)

$\partial_i f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Zusammenhang: Falls f differenzierbar:

- f.a. $\Delta \in \mathbb{R}^n$ $\quad f'(x_0)(\Delta) = \underbrace{J_f(x_0)}_{\mathbb{R}^{m\times n}} \underbrace{\Delta}_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}^m$
- $J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{pmatrix}(x_0) = \underbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\partial_1 f(x_0)}_{\mathbb{R}^m} & \cdots & \underbrace{\partial_n f(x_0)}_{\mathbb{R}^m} \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^{m\times n}}$ $\quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$

Bem zur Notation:

- n-Tupel = Spaltenvektor

  $x \in \mathbb{R}^n$ bedeutet $x = \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\text{n-Tupel}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektor}}$ d.h. $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n \times 1}$

- Zeilenvektor $y = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ | $y = (y_1 \cdots y_2) \neq (y_1, \dots, y_n)$

  $y^T = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Typische auftretende Funktionen

$\underline{n=1, m=1}$: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar (Analysis 1)

$t_0 \in \mathbb{R}$ $\quad f'(t_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear. $\quad \underbrace{f'(t_0)}_{\in B(\mathbb{R},\mathbb{R})}(\overset{\mathbb{R}}{\Delta}) = \underbrace{J_f(t_0)}_{\mathbb{R}^{1\times 1}} \Delta \left(= \underbrace{f'(t_0)}_{\mathbb{R}} \Delta \right)$

$$f': \mathbb{R} \to B(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

$\underline{n=1, m\geq 1}$: $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ (Bahn-)Kurve, Trajektorie

$t_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \gamma'(t_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ linear, $\quad \underbrace{\gamma'(t_0)}_{B(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)}(\overset{\mathbb{R}}{\Delta}) = \underbrace{J_\gamma(t_0)}_{\mathbb{R}^{m\times 1}} \overset{}{\underset{\mathbb{R}}{\Delta}} = \Delta \underbrace{\dot{\gamma}(t_0)}_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}^m$

$$\gamma': \mathbb{R} \to B(\mathbb{R},\mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m\times 1} = \mathbb{R}^m$$

$$\dot{\gamma}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_m(t_0) \end{pmatrix}$$

$\underline{n\geq 1, m=1}$ Skalarfeld, Potential, Höhenfunktion $\quad F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffbar

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\quad F'(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear. $\quad \underbrace{F'(x_0)}_{B(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}(\overset{\mathbb{R}^n}{\Delta}) = \underbrace{J_F(x_0)}_{\mathbb{R}^{1\times n}} \Delta \left(= \underbrace{\operatorname{grad} F(x_0)}_{\mathbb{R}^n}^T \Delta \right) \in \mathbb{R}$

$$F': \mathbb{R}^n \to B(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$$

$$J_F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{1\times n}$$

$$(\operatorname{grad} F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$$

$$J_F(x_0) = \left(\partial_1 F(x_0) \;\cdots\cdots\; \partial_n F(x_0) \right) \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

$n = m \geq 1$

(i) $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld, diffbar

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\quad v'(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear $\quad \underbrace{v'(x_0)}_{B(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}(\overset{\mathbb{R}^n}{\Delta}) = \underbrace{J_v(x_0)}_{\mathbb{R}^{n\times n}} \Delta$

d.h. $v': \mathbb{R}^n \to B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

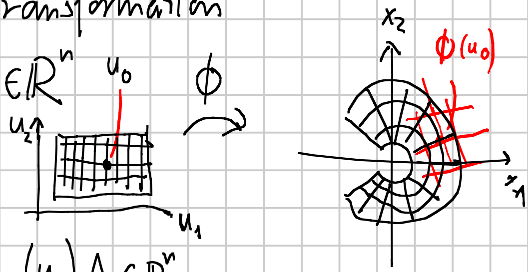
$J_v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$

$$J_v(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1 & \cdots & \partial_n v_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 v_n & \cdots & \partial_n v_n \end{pmatrix}(x_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

(ii) $\phi : \overset{\text{offen}}{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lokaler Homöomorphismus, diffbar.

Parametrisierung, bzw. Koordinatentransformation

$u \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ Parameterpunkt $\quad \phi(u) = x \in \mathbb{R}^n$



$\phi'(u_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear $\qquad \underset{\Psi}{\overset{\mathbb{R}^n}{}} \phi'(u_0)(\Delta) = J_\phi(u_0)\Delta \in \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{J_\phi(u_0)}_{\mathbb{R}^{n\times n}} = \left(\underbrace{\partial_1 \phi(u_0)}_{\in \mathbb{R}^n} \; \cdots \; \underbrace{\partial_n \phi(u_0)}_{\in \mathbb{R}^n} \right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Ist ϕ bijektiv, so ist für $i = 1, \dots, n$

$$V_i : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto \partial_i \phi(\phi^{-1}(x)) \in \mathbb{R}^n \quad \text{ein Vektorfeld.}$$

Bsp: Polarkoordinaten

$$(r,\varphi) \mapsto \phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+_0 \times \{0\}),\; r > 0,\; \varphi \in (0, 2\pi) \text{ bij}$$

$$\partial_r \phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}; \quad \partial_\varphi \phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} r\cos\varphi = x_1 \\ r\sin\varphi = x_2 \end{matrix}}$$

$\partial_r \phi, \partial_\varphi \phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$V_r(x_1,x_2) = \partial_r \phi(\phi^{-1}(x)) = \begin{pmatrix} \cos\tilde\varphi(x_1,x_2) \\ \sin\tilde\varphi(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{pmatrix}$$

$$V_\varphi(x_1,x_2) = \partial_\varphi \phi(\phi^{-1}(x)) = \begin{pmatrix} -\tilde r(x_1,x_2)\sin\tilde\varphi(x_1,x_2) \\ \tilde r(x_1,x_2)\cos\tilde\varphi(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

wobei $\phi^{-1}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \tilde r \\ \tilde\varphi \end{pmatrix}(x_1,x_2)$.

Anm ϕ ist offensichtlich partiell diffbar. ϕ diffbar?

Im Allgemeinen nicht. Hier schon:

Bem (1.) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diffbar g.d.w. $f_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffbar, $j = 1, \dots, m$ (Komponentenweise)

(2.) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = h(x_j)$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar

Dann ist f diffbar, $f'(x)(\underset{\mathbb{R}^n}{\Delta}) = h'(x_j)\Delta_j$ bzw. $\underbrace{J_f(x)}_{\mathbb{R}^{1\times n}} = (0 \cdots 0 \underbrace{h'(x_j)}_{j\text{-te Stelle}} 0 \cdots 0)$

Beweis: $\Delta \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{|f(x_0+\Delta) - f(x_0) - f'(x_0)(\Delta)|}{\|\Delta\|} = \frac{|h(x_j+\Delta_j) - h(x_j) - h'(x_j)\Delta_j|}{\|\Delta\|}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \text{ für } \Delta_j = 0 \\ \underbrace{\left|\frac{h(x_j+\Delta_j)-h(x_j)-h'(x_j)\Delta_j}{\Delta_j}\right|}_{\to 0 \text{ für } \Delta_j \to 0} \underbrace{\frac{|\Delta_j|}{\|\Delta\|}}_{\leq 1} \quad \text{für } \Delta_j \neq 0 \end{Bmatrix} \to 0 \text{ für } \Delta \to 0$$

Mit Summen-, Produkt-, und Kettenregel folgt, z.B., dass

$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ differenzierbar.