Mathematatik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 1

Notiztitel 22.04.2013

Start der ZÜ: 12:00 – 13:30

Firefox

https://campus.tum.de/tumonline/sa.gruppen_einteilung?clvnr=950091109&corg=14208

840060390 13S 2SWS TT Tutorübungen zur Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2) [MA9203] Hilfe TUMonline

Teilnehmerverwaltung - Gruppenliste

Gruppenname	TeilnehmerInnen max.	max.(gepl.)	ist (Dr.)	WL	Anmeldung von	Anmeldung bis	Web	Abmeldung bis	Web	Reihungsverfahren	Anz. Pos.	Zeit Ort	Grp. Vor.	Pr. Vor.	keine WL bei freien FP	Studi wech
	Anmerkung															
T01 Di 08:30, MI 03.10.011 (auf englisch)	20	20	2	0	18.04.13,18:30	20.07.13,23:59	✓	29.09.13,23:59	✓	FCFS						
T02 Di 10:15, MW0337	20	20	16	0	18.04.13,18:30	28.07.13,23:59	✓	28.07.13,23:59	✓	FCFS						
T03 Di 12:00, MW0337	20	20	20	1	18.04.13,18:30	28.07.13,23:59	✓	28.07.13,23:59	✓	FCFS						
T04 Mi 8:30, MW2050	20	20	20	3	18.04.13,18:30	28.07.13,23:59	✓	28.07.13,23:59	✓	FCFS						
T05 Do 8:30, ???	20	20	10	0	18.04.13,18:30	20.07.13,23:59	✓	29.09.13,23:59	✓	FCFS						
T06 Do 14:15, CH 26411?	20	20	20	1	18.04.13,18:30	28.07.13,23:59	✓	28.07.13,23:59	✓	FCFS						
T07 Do 16:00, MW 0337	20	20	7	0	18.04.13,18:30	28.07.13,23:59	✓	28.07.13,23:59	✓	FCFS						
T08 Fr 08:15, MI02.04.011	20	20	20	0	18.04.13,18:30	20.07.13,23:59	✓	29.09.13,23:59	✓	FCFS						
T09 Fr 10:00, MI 03.10.011	20	20	20	2	18.04.13,18:30	28.07.13,23:59	✓	28.07.13,23:59	✓	FCFS						
T10 Fr 10:15, MW 2701m	20	20	20	1	18.04.13,18:30	20.07.13,23:59	✓	29.09.13,23:59	✓	FCFS						

!

zusätzliche Tutorgruppe

www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2013S

Hausaufgabenabgabe:

Blattnr	Name	Tutorgruppe
⋮		⋮

- Abgabe bis Mo 12:00 im Briefkasten (Keller FMI-Gebäude)
- Jede Aufgabe wird mit 0-4 Punkten bewertet.
- ≥ 1 bedeutet „sinnvoll bearbeitet"
- $\geq 70\%$ der HA „sinnvoll bearbeitet" + 1mal Vorrechnen.

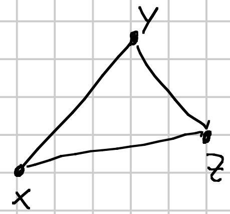
Metrische Räume

$d: M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ Metrik:

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

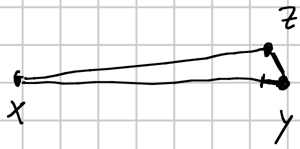
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ Δ-Ungl.



Bemerkung: Für $x,y,z \in M$ gilt

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$$



Bew: $d(x,y) - d(x,z) \leq d(y,z)$ folgt aus Δ-Ungl.: $d(x,y) \leq d(y,z) + d(z,x)$

$d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z)$ folgt aus : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

aus $a \leq b$ und $-a \leq b$ folgt $|a| \leq b$ (in $\mathbb{R}$)

offene, abgeschlossene Mengen, Rand

(M,d) metrischer Raum

Für $\epsilon > 0$, $x \in M$ heißt

$B_\epsilon(x) = \{ y \in M \mid d(x,y) < \epsilon \}$ ϵ-Kugel um x, ϵ-Umgebung von x

$U \subseteq M$ heißt Umgebung von x wenn U eine ϵ-Umgebung von x enthält

$A \subseteq M$ heißt offen, wenn A für jedes $x \in A$ eine Umgebung von x ist

Bemerkung: • $B_\epsilon(x)$ ist Umgebung von x. klar!

• $B_\epsilon(x)$ ist offen.

Sei $y \in B_\epsilon(x)$, d.h. $d(y,x) < \epsilon$. Setze $r = \epsilon - d(y,x) > 0$.

Dann ist $B_r(y) \subseteq B_\epsilon(x)$, denn

Sei $z \in B_r(y) \Rightarrow d(z,y) < r \Rightarrow d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < r + (\epsilon - r) = \epsilon$

$\Rightarrow z \in B_\epsilon(x)$, d.h. $B_\epsilon(x)$ ist Ugb. von y, also ist $B_\epsilon(x)$ offen

Inneres, Abschluss

$\subseteq$ Teilmenge

$(\subset)$

$\subsetneq$

Sei $A \subseteq M$ beliebig, (M,d) metr. Raum

in $\mathbb{R}$

abg.:	$\{0\}$, $\emptyset$, $[0,\infty) = \mathbb{R}^+_0$	$[0,1) = [0,1[$, $\mathbb{Q}$
offen	$\emptyset$ $(-\infty,0) = \mathbb{R}^-$	

$\mathring{A} = \{x \in A \mid A \text{ ist Umgebung von } x\}$ ist das Innere von A

Bemerkung: • $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ offen}}} B$, d.h. $\mathring{A}$ ist die größte offene in A enthaltene Menge

Bew: "$\subseteq$" $x \in \mathring{A} \Rightarrow A$ ist Ugb von $x \Rightarrow$ Es gibt $\overbrace{\underbrace{B_\epsilon(x)}_{\text{offen}}}^{\text{ein } \epsilon > 0, \text{ s.d}} \subseteq A \ni x \in B_\epsilon(x) \subseteq \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ offen}}} B$

"$\supseteq$" $x \in \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ offen}}} B \overset{\text{d.E. nichtleer}}{\Rightarrow}$ es gibt $B \subseteq A$ offen mit $x \in B \Rightarrow B$ ist Ugb von x

$\Rightarrow A$ ist Umgebung von $x \Rightarrow x \in \mathring{A}$

• $\overline{A} \overset{\text{def}}{=} M \setminus (M \setminus A)^\circ$. Es gilt

$\overline{A} = \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ C \text{ abg.}}} C$ Bew HA

Konvergenz, Cauchyfolgen

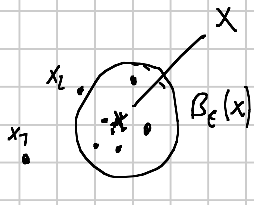
$x \mapsto f(x)$

(M,d) metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in M, $x \in M$

<u>(x_n) konvergiert gegen x</u>, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, bedeutet

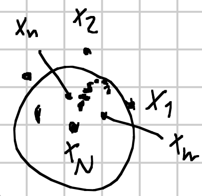
$$d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (\text{Nullfolge in } \mathbb{R})$$

bzw: $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \quad d(x_n, x) < \epsilon$



anschaulich: In jeder ϵ-Kugel um x liegen
<u>fast alle</u> ($\hat{=}$ bis auf endlich viele) Folgenglieder x_n

(x_n) ist Cauchyfolge (CF), falls



$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n,m \geq N \quad d(x_n, x_m) < \epsilon$$

anschaulich: zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ s.d. fast alle Folgenglieder x_n in $B_\epsilon(x_N)$ liegen.

<u>Bemerkung</u> Ist (x_n) konvergent, so ist der Grenzwert eindeutig

Bew: $x_n \to x \in M$, $x_n \to y$. z.z. $x = y$

$$d(x,y) \leq \underbrace{d(x,x_n)}_{\to 0} + \underbrace{d(x_n,y)}_{\to 0} \to 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \quad \square$$

Charakterisierung abgeschlossener Mengen

Satz aus der Vorl: $A \subseteq M$, (M,d) metr. Raum.

Dann ist $\bar{A}$ die Menge aller Grenzwerte von Folgen in A:

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow$ es gibt eine gegen x konvergente Folge x_n in A

Bemerkung: $A \subseteq M$ ist abgeschlossen, g.d. wenn aus $(x_n) \subseteq A$ ($(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$) konvergent folgt, dass $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$

Bew: "$\Rightarrow$" A abg. $\Rightarrow A = \bar{A}$. Sei (x_n) konvergente Folge in A, d.h. $x_n \to x \in M \Rightarrow x \in \bar{A} = A$

"$\Leftarrow$" Habe jede Folge $x_n \in A$ ihren Grenzwert in A

Ann. $A \neq \bar{A}$, d.h. sei $x \in \bar{A} \setminus A$. Es gibt also eine Folge in A die gegen $x \notin A$ konvergiert $\lightning$.