II.2. Rechenregeln

Satz (Linearität der Ableitung):

Sei $U \subseteq X$ offen und $f, g: U \to Y$ bei $x_0 \in U$ diff.bar, dann gilt:

(i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(ii) $\forall c \in \mathbb{R}: \quad (cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

Beweis: (i) $\| (f+g)(x_0+\Delta) - (f+g)(x_0) - (f'(x_0) + g'(x_0))\Delta \| / \|\Delta\|$

$$\leq \| f(x_0+\Delta) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta \| / \|\Delta\|$$

$$+ \| g(x_0+\Delta) - g(x_0) - g'(x_0)\Delta \| / \|\Delta\| \to 0$$

(ii) folgt ebenfalls sofort aus der Def. $\square$

Satz (Kettenregel): Seien X, Y, Z Banachräume & $f: U \subseteq X \to Y$, $g: V \subseteq Y \to Z$ wobei U, V offen sind. Ist f diff.bar bei $x \in U$ und g diff.bar bei $y := f(x) \in V$, dann gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \circ f'(x)$$

Beweis: $f(x+\Delta) = f(x) + f'(x)\Delta + r(\Delta)$ mit $\lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{\|r(\Delta)\|}{\|\Delta\|} = 0$

$g(y+\Delta') = g(y) + g'(y)\Delta' + s(\Delta')$ ebenfalls mit $s(\Delta') = o(\|\Delta'\|)$.

mit $\Delta' := f'(x)\Delta + r(\Delta)$ und $h(\Delta) := g'(y) r(\Delta) + s(\Delta')$ gilt:

$(g \circ f)(x+\Delta) = g(y) + g'(y) f'(x)\Delta + h(\Delta)$.

z.z.: $h(\Delta) = o(\|\Delta\|)$

dies folgt aus $\frac{\|h(\Delta)\|}{\|\Delta\|} \leq \|g'(y)\| \frac{\|r(\Delta)\|}{\|\Delta\|} + \frac{\|s(\Delta')\|}{\|\Delta'\|} \frac{\|\Delta'\|}{\|\Delta\|}$

$$\leq \underbrace{\|g'(y)\|}_{<\infty} \underbrace{\frac{\|r(\Delta)\|}{\|\Delta\|}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\|s(\Delta')\|}{\|\Delta'\|}}_{\to 0} \left(\underbrace{\|f'(x)\|}_{<\infty} + \underbrace{\frac{\|r(\Delta)\|}{\|\Delta\|}}_{\to 0} \right)$$

$\square$

Def.: • Für Banachräume X, Y, Z heißt eine Abb. $\beta: X \times Y \to Z$ „bilinear" wenn sie linear in beiden Argumenten ist.

• β heißt „beschränkt" wenn $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall (x,y) \in X \times Y$:

$$\|\beta(x,y)\| \leq c\, \|x\| \cdot \|y\|$$

Beispiele: • „Kreuzprodukt" $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

• Skalarprodukt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

Lemma: Sei $\beta: X \times Y \to Z$ eine beschränkte, bilineare Abb. & $\|(x,y)\| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$.
β ist diff.bar auf ganz $X \times Y$ und es gilt

$$\beta'(x,y): (s,t) \mapsto \beta(x,t) + \beta(s,y).$$

Beweis: $\beta(x+s, y+t) - \beta(x,y) - \big(\beta(x,t) + \beta(s,y)\big) = \beta(s,t)$

und dafür gilt $\dfrac{\|\beta(s,t)\|}{\|(s,t)\|} \leq \dfrac{c\,\|s\| \cdot \|t\|}{\max\{\|s\|, \|t\|\}} \longrightarrow 0$ $\square$

Satz (Produktregel): Sind $f, g: U \to Y$ in der offenen Menge $U \subseteq X$ diff.bar und ist $\beta: Y \times Y \to Z$ bilinear & beschränkt, dann ist auch $h: U \to Z$, $x \mapsto \beta(f(x), g(x))$ in U diff.bar und es gilt $\forall x_0 \in U$:

$$h'(x_0): x \mapsto \beta(f'(x_0)x, g(x_0)) + \beta(f(x_0), g'(x_0)x)$$

Beweis: Anwendung der Kettenregel auf $h = \beta \circ \alpha$ mit $\alpha: U \to Y \times Y$, $x \mapsto (f(x), g(x))$

liefert: $h'(x_0) = (\beta \circ \alpha)'(x_0) = \beta'(\alpha(x_0)) \circ \alpha'(x_0)$

$$= \beta'(f(x_0), g(x_0))\big(f'(x_0), g'(x_0)\big)$$

Die Behauptung folgt dann aus dem vorangehenden Lemma.

$\square$

Bsp.: Für das Kreuzprodukt diff.barer Abb.en $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

II.3. Richtungsableitungen & partielle Ableitungen

Satz: Sei $U \subseteq X$ offen und $f: U \to Y$ diff.bar bei $x \in U$. Für gegebenes $v \in X$ gilt dann für die Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(x+tv)$:

$$\frac{d}{dt} f(x+tv)\Big|_{t=0} = f'(x)v$$

Def.: Dies nennt man „Richtungsabl." von f bei x in Richtung v und wir schreiben $\partial_v f(x) := \frac{d}{dt} f(x+tv)\Big|_{t=0}$

Beweis: Es gilt $f(x+tv) = f(x) + f'(x)tv + o(\|tv\|)$ und damit

$$f'(x)v = \underbrace{\frac{1}{t}\Big(f(x+tv) - f(x)\Big)}_{\downarrow \atop \frac{d}{dt} f(x+tv)|_{t=0}} + \underbrace{\frac{o(\|tv\|)}{t}}_{\downarrow \atop 0} \quad \text{im Limes } t \to 0 \qquad \square$$

Def.: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to Y$, $x \mapsto f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$.
Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta}\Big(f(x_1, \ldots, x_i+\Delta, \ldots x_n) - f(x)\Big) =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$
so heißt dieser „partielle Ableitung" von f nach der Variablen x_i bei x.

Bemerkungen:

- Ist $\{e_i \in \mathbb{R}^n\}_{i=1}^n$ ONB und $x = \sum\limits_{i=1}^n x_i e_i$, dann ist
  $$\partial_{e_i} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) =: \partial_i f(x)$$ die Richtungsabl. bei x in Richtung e_i.
- Die partielle Abl. ist die Abl. der Funktion
  $x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ für feste x_j $j \neq i$.
- Wenn f diff.bar ist, dann existieren alle Richtungsableitungen.

Bsp.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3y^2 + x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 + 1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y$$

Korollar: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ in U diff.bar, dann gilt:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n: \quad f'(x_0)v = \begin{array}{cc} m\updownarrow & \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \dots & \partial_n f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \dots & \partial_n f_m(x_0) \end{pmatrix} \\ & \xleftrightarrow{\quad n \quad} \end{array} v \;=:\; J_f(x_0)\,v$$

Beweis: Mit $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ erhalten wir

$$f'(x_0)v = \sum_{i=1}^n f'(x_0)e_i\, v_i = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x_0)\, v_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \partial_i f_1(x_0) \\ \vdots \\ \partial_i f_m(x_0) \end{pmatrix} v_i = J_f(x_0) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \square$$

Bemerkungen:

- Die Kettenregel führt auf das Produkt der Jacobimatrizen, d.h. $J_{g\circ f}(x) = J_g(y) \cdot J_f(x)$ mit $y = f(x)$.
- In der Physik schreibt man dafür oft „$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial g_k}\frac{\partial g_k}{\partial x_j}$"
- Ein wichtiger Spezialfall ist: $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} f\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))\, \dot{x}_i(t)$$