Bsp.e.: ∘ Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, dann ist $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit $L = 1$, da aus der ΔUngl. folgt $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$

∘ Polynome $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $p(x) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} a_{k_1 \dots k_n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{k_j}$ sind stetig

Def.: Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

- Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt „Homöomorphismus", wenn sie bijektiv ist, und sowohl f als auch f^{-1} stetig ist.
- X & Y heißen „homöomorph", wenn es einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt.

Bsp.: ∘ $(-1, 1)$ und $\mathbb{R}$ sind homöomorph, da $(-1, 1) \ni x \mapsto \tan(\frac{\pi}{2} x) \in \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus ist.

∘ $f : [0, 2\pi) \to S^1 := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \}$, $f(t) := (\cos t, \sin t)$ ist zwar stetig & bijektiv aber kein Homöomorphismus, da f^{-1} nicht stetig ist.

I.4. Kompaktheit

Def.: Sei (M, d) ein metrischer Raum. $X \subseteq M$ heißt „kompakt", wenn jede Folge $a : \mathbb{N} \to X$ eine in X konvergente Teilfolge besitzt.

Bem.: Die so definierte Eigenschaft nennt sich eigentlich „Folgenkompaktheit". Für metrische Räume stimmt diese jedoch mit „Kompaktheit" überein.

Korollar: Ist X kompakte Teilmenge eines metrischen Raums (M, d) dann gilt X ist abgeschlossen.

<u>Beweis:</u> Sei $x \in X^{\mathbb{N}}$ eine in M konvergente Folge mit Grenzwert $\tilde{x}$. Wegen Kompaktheit besitzt x eine in X konvergente Teilfolge. Da diese auch gegen $\tilde{x}$ konvergieren muß, ist (wegen S. 5) $X = \overline{X}$. $\square$

<u>Def.:</u> In (M, d) heißt $X \subseteq M$ „<u>beschränkt</u>", wenn $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in X : d(x,y) < c$.

<u>Satz:</u> (Heine-Borel) In $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ gilt für jedes $X \subseteq \mathbb{K}^n$:

$$X \text{ ist kompakt} \iff X \text{ ist abgeschlossen \& beschränkt}$$

<u>Beweis:</u> "$\Rightarrow$": Abgeschlossenheit folgt aus vorigem Korollar. Wäre X nicht beschränkt, dann gäbe es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X, so dass $\|x_n\| > n\ \forall n \in \mathbb{N}$ was keine konvergente Teilfolge zuließe.

Skizze für "$\Leftarrow$": Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Da X beschränkt ist, existiert eine in $\mathbb{K}^n$ konvergente Teilfolge $x_{g(n)} \to x \in \mathbb{K}^n$ (Bolzano-Weierstrass). Aus der Abgeschlossenheit von X folgt mit dem Satz auf S. 5 $x \in X$. $\square$

<u>Bem.:</u>
- X kompakt $\Rightarrow$ X beschränkt gilt in bel. metrischen Räumen.
- i.A. folgt Kompaktheit nicht aus Abgeschlossenheit $\wedge$ Beschränktheit.

<u>Lemma:</u> Ist M ein kompakter metrischer Raum & $X \subseteq M$ abgeschlossen, dann ist auch X kompakt.

<u>Beweis:</u> Sei $x : \mathbb{N} \to X \subseteq M$ eine Folge. Da M kompakt ist, gibt es eine in M konvergente Teilfolge $X \ni x_n \to \tilde{x} \in M$. Da $X = \overline{X}$ gilt, dass $\tilde{x} \in X$ (siehe S. 5). Also besitzt x eine in X konvergente Teilfolge. Demnach ist X kompakt $\square$

Satz: (Stetige Abb.en & Kompaktheit)

Sind X, Y metrische Räume, X kompakt und $f: X \to Y$ stetig, dann gilt:

(i) $f(X)$ ist kompakt

(ii) f ist gl. stetig auf X

(iii) Wenn f bijektiv ist, dann ist f^{-1} gl. stetig auf Y.

Beweis: (i) Betrachte eine Folge $y: \mathbb{N} \to f(X)$. Zu jedem y_n gibt es ein $x_n \in X$, so dass $y_n = f(x_n)$. Da X kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $\tilde{x}_n := x_{g(n)}$. Mit dem Satz auf S. 7 ist wegen Stetigkeit von f auch $\tilde{y}_n := f(\tilde{x}_n)$ eine konvergente Teilfolge von y_n.

(ii) $\longrightarrow$ Übung

(iii) Aus der Bijektivität folgt $Y = f(X)$, so dass Y wegen (i) kompakt ist.

Wegen (ii) genügt es nun Stetigkeit zu zeigen. Wir zeigen, dass abgeschlossene Mengen in X abgeschlossene Urbilder unter f^{-1} in Y haben. Durch Betrachten der Komplemente folgt mit S. 7 dann Stetigkeit.

Sei nun $A = \bar{A} \subseteq X$. Wegen des Lemmas auf S. 10 ist ist A kompakt.

Das Urbild $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ ist wegen (i) ebenfalls kompakt und damit abgeschlossen. $\square$

Bemerkung:

- (i) impliziert z.B., dass $[0, 2\pi)$ & S^1 nicht homöomorph sind.

  Denn, da S^1 kompakt ist, muß für jeden Homöomorphismus f auch $f(S^1)$ kompakt sein. $[0, 2\pi)$ ist dies aber nicht.

- Die spezielle orthogonale Gruppe $SO(2) := \{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^T A = \mathbb{1} \} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2} \simeq \mathbb{R}^4$ ist kompakt, da $f: [0, 2\pi] \ni \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in SO(2)$ stetig ist.

  Analoges gilt für $SO(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Satz: Ist X kompakt und $f: X \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es $x_{min}, x_{max} \in X$, so dass $f(x_{min}) = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ und $f(x_{max}) = \sup\limits_{x \in X} f(x)$.

Beweis: Nach vorigem Satz ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt also auch beschränkt, so dass $y_{max} = \sup f(X)$ und $y_{min} = \inf f(X)$ existieren. Da $f(X)$ auch abgeschlossen ist, muß $y_{max}, y_{min} \in f(X)$ gelten. $\square$

Bsp.: Auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist mit $\|M\|_2 := \left(\sum_{ij} M_{ij}^2\right)^{1/2}$ eine Norm definiert.

$\inf\limits_{M \in SO(n)} \|M - A\|_2$ nimmt dann für ein $M_0 \in SO(n)$ ein Minimum an, da $M \mapsto \|M - A\|_2$ stetig & $SO(n)$ kompakt ist.

(M_0 ist dann diejenige Rotation, die A am besten approximiert.)