IV.3. Äquivalente Charakterisierungen von UMFen des $\mathbb{R}^n$

Satz: Für $l \geq 1$ ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m-dim. C^l-UMF des $\mathbb{R}^n$ genau dann wenn eine (& damit jede) der folgenden Charakterisierungen möglich ist:

(i) M ist lokale Nullstellenmenge einer regulären Abbildung, d.h. $\forall x \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \in C^l(U, \mathbb{R}^{n-m})$, so dass $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ und $\mathrm{Rang}(f'(x)) = n-m$.

(ii) M ist lokaler Graph einer Abbildung, d.h. nach eventueller Umordnung der Koordinaten gibt es für jeden Punkt in M eine offene Umgebung der Form $U = V \times W \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ und ein $F \in C^l(V, W)$, so dass

$$M \cap U = \{(x, F(x)) \mid x \in V\}$$

Beweis: (i) nach dem Satz vom regulären Wert & dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit ist (i) hinreichend.

Um Notwendigkeit zu zeigen, betrachte eine äußere Karte H mit $H(M \cap U) = \mathbb{R}^m \times \{0\} \cap U'$ und definiere $f: U \to \mathbb{R}^{n-m}$ als

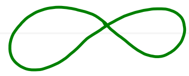
$f(x) := (H_{m+1}(x), \dots, H_n(x))$. Dann ist $f \in C^l$ und $f'(x)$ ist durch die Jacobi-Matrix $(\nabla H_{m+1}(x) \dots \nabla H_n(x))^T \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$ gegeben. Dies hat max. Rang, also $n-m$, da H ein Diffeomorphismus ist. Außerdem ist $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in M \cap U$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Wähle eine offene Umgebung $V \times W \subseteq U$ und eine Umordnung der Koordinaten, so dass $f: V \times W \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ so ist, dass $d_y f(x,y): \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Dann läßt sich $f(x,y) = 0$ mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen nach y auflösen & $y(x) =: F(x)$ liefert die gewünschte Funktion.

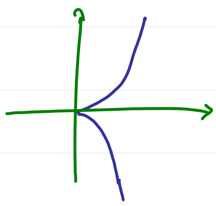
(ii) ⇒ (i) Mit $f(x,y) := y - F(x)$ gilt $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = F(x)$ und $\operatorname{Rang} f'(x,y) = n-m$, da $f'(x,y)$ durch die Jacobi-Matrix $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \;\vdots\; \mathbb{1} \right) \in \mathbb{R}^{n-m \times n}$ repräsentiert wird. □

<u>Bsp.e.</u> die keine C^k-UMFen sind:

- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(1-x^2) - y^2 = 0\}$ ist keine UMF des $\mathbb{R}^2$, wegen der Überschneidung bei $(0,0)$.



- $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$ ist keine C^1-UMF des $\mathbb{R}^2$, da um $(0,0)$ herum M weder ein Graph von $y = y(x)$ noch von einer diff.baren Funktion $x = x(y)$ ist, da die Ableitung von $y \mapsto |y|^{2/3}$ bei 0 divergiert.

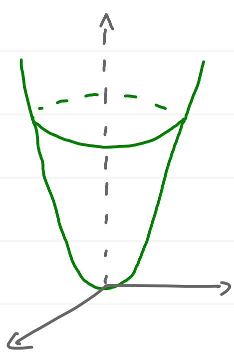


Eine weitere äquivalente Charakterisierung stellen <u>Parametrisierungen</u> dar, d.h.

$\forall x \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und einen C^k-Diffeomorphismus $h^{-1}: W \to M \cap U$. D.h. h stellt eine innere Karte dar.

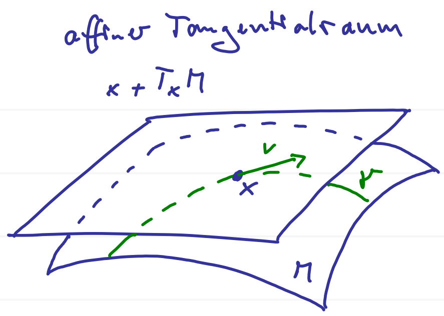
h^{-1} heißt „<u>Parametrisierung</u>“.

<u>Bsp.:</u> Paraboloid $M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a x_1^2 + b x_2^2 = x_3\}$ für $a, b > 0$.



- Nullstellenmenge von $f(x) = x_3 - a x_1^2 - b x_2^2$
- Graph von $F(x_1, x_2) = a x_1^2 + b x_2^2$
- Parametrisierung $h^{-1}: \mathbb{R}^2 \to M$

$$(x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ a x_1^2 + b x_2^2 \end{pmatrix}$$



IV.4. Tangentialräume

Def.: ◦ Sei $l \geq 1$ & $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^l-UMF der Dim. m.
Ein „Tangentialvektor" an M in $x \in M$ ist ein Vektor $v = \dot{\gamma}(0)$, wobei $\gamma \in C^1((-1,1), M)$ eine stetig diff.bare Kurve mit $\gamma(0) = x$ ist.

◦ Die Menge $T_x M$ aller Tangentialvektoren an M in x heißt „Tangentialraum" an x.

Satz: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1-UMF der Dimension m und $x \in M$.

(i) $T_x M$ ist ein m-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(ii) Ist $H : U \to U'$ eine äußere Karte für M um x, dann gilt

$$T_x M = H^{-1\prime}(H(x))\left(\mathbb{R}^m \times \{0\}\right)$$

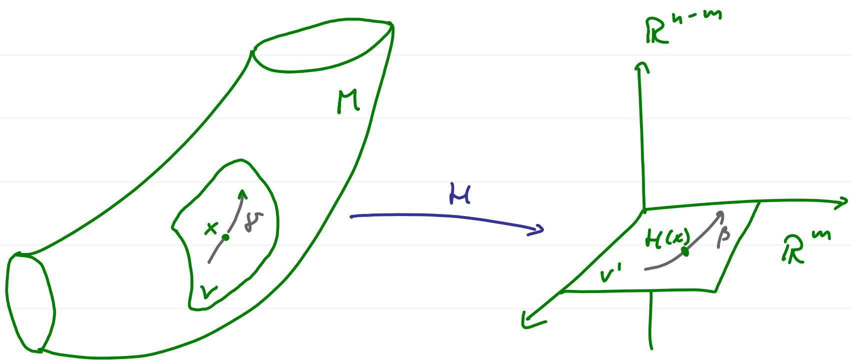
(iii) Ist $M = f^{-1}(\{y\})$ Urbild eines regulären Werts y von $f \in C^1(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m})$, dann gilt $T_x M = \ker[f'(x)]$

$$= \{ v \in \mathbb{R}^n \mid f'(x) v = 0 \}$$

Beweis: Es gilt $T_x((\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U') = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ (1)

Der allgemeine Fall folgt dann durch Verwendung einer äußeren Karte $H : U \to U'$: Sei $V = M \cap U$, $\gamma \in C^1((-1,1), V)$, $\gamma(0) = x$, $\beta \in C^1((-1,1), V' \times \{0\})$

$\beta = H \circ \gamma$



Für die Tangentialvektoren gilt nach der Kettenregel:

$\dot\beta(0) = H'(x)\,\dot\gamma(0)$ also $\dot\gamma(0) = [H'(x)]^{-1}\,\dot\beta(0)$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad T_xM = [H'(x)]^{-1}\left(\mathbb{R}^m \times \{0\}\right)$ was (i) beweist

$= {H^{-1}}'(H(x))\left(\mathbb{R}^m \times \{0\}\right)$ was (ii) beweist

Für (iii) verwenden wir, dass aus $f \circ \gamma = y$ folgt $f'(x)\,\dot\gamma(0) = 0$

und damit $T_xM \subseteq \mathrm{Kern}[f'(x)]$.

Da $f'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ surjektiv ist, ist $\dim \mathrm{Kern}[f'(x)] = m = \dim T_xM$.

Demnach muß $T_xM = \mathrm{Kern}[f'(x)]$ sein. □

<u>Bemerkung:</u> $T_xM = \mathrm{Kern}[f'(x)]$ ist, da $\begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_{n-m}(x)^T \end{pmatrix}$ die Jacobimatrix zu $f'(x)$ ist,

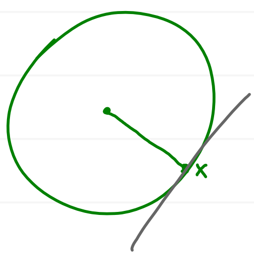
gleichbedeutend mit $T_xM = \{\nabla f_i(x)\}^{\perp}_{i=1..n-m}$.

D.h. Tangentialräume & Gradienten spannen orthogonale Räume auf.

<u>Bsp.:</u> (1) Einheitssphäre $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) := \langle x, x\rangle - 1 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$

$\nabla f(x) = 2x \Rightarrow T_xM = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v\rangle = 0\}$

(2) Orthogonale Gruppe $O(n) := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid f(X) := X^TX - \mathbb{1} = 0\}$



$T_{\mathbb{1}}O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = -A\}$ da

$f'(\mathbb{1})A = A + A^T \overset{!}{=} 0$ für $A \in T_{\mathbb{1}}O(n)$.

(Tatsächlich gilt $A \in T_{\mathbb{1}}O(n) \Rightarrow e^A \in SO(n)$ und

$X \in SO(n) \Rightarrow \exists A \in T_{\mathbb{1}}M : X = e^A$)