**Satz:** (Parametrisierungsunabhängigkeit von Kurvenintegralen)

Sei: $F \in C(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld, $\gamma \in C^1([t_0,t_1], U)$ und $\tilde{\gamma} \in C^1([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1], U)$ Kurven, so dass $\gamma = \tilde{\gamma} \circ f$ für $f \in C^1([t_0,t_1], [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1])$ mit $f(t_0) = \tilde{t}_0$ & $f(t_1) = \tilde{t}_1$. Dann gilt:

$$\int_\gamma F(r) \cdot dr = \int_{\tilde{\gamma}} F(r) \cdot dr$$

**Beweis:**

$$\int_\gamma F(r) \cdot dr = \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt \underset{\dot{\gamma}(t) = \dot{\tilde{\gamma}}(f(t))\, \dot{f}(t)}{=} \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t))\, \dot{\tilde{\gamma}}(f(t))\, \dot{f}(t)\, dt$$

$$\overset{\tau := f(t)}{=} \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} F(\tilde{\gamma}(\tau)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}\, d\tau = \int_{\tilde{\gamma}} F(r) \cdot dr$$

**Def.:** Ein Vektorfeld $F \in C(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ heißt „<u>konservativ</u>", wenn $\oint_\gamma F(r) \cdot dr = 0$ für alle stückweise $C^1$-Kurven in $U$ gilt.

**Satz:** (Gradientenfelder sind konservativ)

Sei: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ & $\gamma \in C^1([t_0,t_1], U)$. Dann gilt:

$$\int_\gamma (\nabla\phi)(r) \cdot dr = \phi(\gamma(t_1)) - \phi(\gamma(t_0)).$$

Insbesondere gilt $\oint_\gamma (\nabla\phi)(r) \cdot dr = 0$ für geschlossene Kurven.

**Beweis:** Nach der Kettenregel gilt $\frac{d}{dt}\phi(\gamma(t)) = \nabla\phi(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$ und damit

$$\int_\gamma (\nabla\phi)(r) \cdot dr = \int_{t_0}^{t_1} (\nabla\phi)(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\phi(\gamma(t))\, dt$$

$$= \phi(\gamma(t_1)) - \phi(\gamma(t_0))$$

Falls $\gamma = \sum_i \gamma_i$ nur stückweise $C^1$ ist, greift dasselbe Argument mit $\int_\gamma \ldots = \sum_i \int_{\gamma_i} \ldots$. $\square$

<u>Satz</u> (Äquivalenz zw. Konservativität & Existenz eines Potentials):

Für ein Vektorfeld $F \in C(U, \mathbb{R}^n)$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sind äquivalent:

(i) „Wegunabhängigkeit des Integrals" d.h. $\int_\gamma F(r) \cdot dr = \int_{\tilde{\gamma}} F(r) \cdot dr$ für alle stückweise $C^1$-Kurven $\gamma, \tilde{\gamma} \in C([0,1], U)$ mit $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ & $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$.

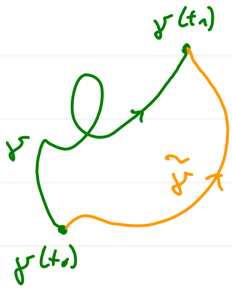
(ii) $F$ ist konservativ

(iii) „Existenz eines Potentials", d.h. $\exists\, \phi \in C^1(U, \mathbb{R}) : F = \nabla \phi$.

<u>Bemerkung</u>: (i) ermöglicht es $\int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t_1)} F(r) \cdot dr := \int_\gamma F(r) \cdot dr$ nur in Abh. der Randpunkte der Kurve zu definieren.

<u>Beweis</u>: (i) ⇒ (ii) Sei $\gamma \in C([0,1], U)$ stückweise $C^1$ & geschlossen. Dann gilt mit $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(0) = \gamma(1)$, dass $\oint_\gamma F(r) \cdot dr \overset{(i)}{=} \int_{\tilde{\gamma}} F(r) \cdot dr = 0$

(ii) ⇒ (i) Aus $\gamma, \tilde{\gamma}$ konstruieren wir eine geschlossene Kurve $\Gamma$ wie folgt. Definiere $\tilde{\gamma}_- \in C([t_1, 2t_1 - t_0], U)$ als $\tilde{\gamma}_-(t) := \tilde{\gamma}(2t_1 - t)$. D.h. $\tilde{\gamma}_-$ & $\tilde{\gamma}$ durchlaufen denselben Weg, nur in umgekehrter Richtung. $\Gamma := \gamma + \tilde{\gamma}_-$ ist demnach geschlossen & es gilt




$$0 \overset{(ii)}{=} \oint_\Gamma F(r) \cdot dr = \int_\gamma F(r) \cdot dr + \int_{\tilde{\gamma}_-} F(r) \cdot dr$$

$$= \int_\gamma F(r) \cdot dr - \int_{\tilde{\gamma}} F(r) \cdot dr$$

(iii) ⇒ (i) ist der vorige Satz.

(i) ⇒ (iii) Wähle $x_0 \in U$ & definiere $\phi(x) := \int_{x_0}^{x} F(r) \cdot dr$. Dann ist

$$\phi(x+\Delta) - \phi(x) - F(x) \cdot \Delta = \int_x^{x+\Delta} F(r) \cdot dr - F(x) \cdot \Delta$$

$$= \int_x^{x+\Delta} (F(r) - F(x)) \cdot dr \qquad (*)$$

Letzteres gilt da $F(x) =: \tilde{F}$ konstant bzgl. $r$ ist und mit $\gamma(t) := x + t\Delta$ gilt

$$\int_x^{x+\Delta} \tilde{F} \cdot dr = \int_0^1 \tilde{F} \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^1 \tilde{F} \cdot \Delta \, dt = \tilde{F} \cdot \Delta .$$

Es gilt also
$$\frac{\| \phi(x+\Delta) - \phi(x) - F(x)\cdot\Delta \|}{\|\Delta\|} \overset{(*)}{=} \frac{\| \int_0^1 \big(F(x+t\Delta) - F(x)\big)\cdot \Delta \, dt \|}{\|\Delta\|}$$

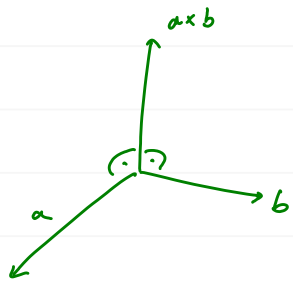
$$\leq \int_0^1 \| F(x+t\Delta) - F(x) \| \, dt \to 0 \quad \text{für } \Delta \to 0 \qquad \square$$

Bemerkung: $\phi(x) := \int_{x_0}^{x} F(r)\cdot dr$ spielt die Rolle einer „Stammfunktion" die sich so also nur für Gradientenfelder definieren läßt.

## II.12. Nabla Kalkül

Erinnerung:

Für das „Kreuzprodukt" $a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ gilt:




- $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\varphi$
- $a \cdot (a\times b) = b \cdot (a \times b) = 0$
- $a \times b = - b \times a$
- $a \times (b \times c) = b(a\cdot c) - c(a \cdot b)$
- $(a\times b)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$ mit dem „Levi-Civita-Tensor"

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} +1 & (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1 & \text{—"— ungerade —"— \quad —"—} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten vier verwandte „Differentialoperatoren":

$$\begin{tikzcd}
\text{Vektorfeld} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[dr, "\mathrm{div}" near end] & \text{Vektorfeld} \\
\text{Skalarfeld} \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[ur, "\mathrm{grad}" near start] & \text{Skalarfeld}
\end{tikzcd}$$

Alle lassen sich mit Hilfe des „Nabla Operators" $\nabla := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$ ausdrücken.

(Dies ist erst einmal eine Kurzschreibweise & noch keine math. Def.)

Der Vollständigkeit halber sei auch an die Def. von Gradient & Laplace-Op. erinnert:

**Def.:** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}$.

- Der „Gradient" $\mathrm{grad}: C^k(U,\mathbb{R}) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R}^n)$ ist definiert als

$$\mathrm{grad}\,\phi := \nabla \phi$$

(Beachte Vorzeichenkonvention in der Physik: wenn $\nabla\phi$ ein Kraftfeld ist, so ist $-\phi$ das zug. Potential)

- Die „Divergenz" $\mathrm{div}: C^k(U,\mathbb{R}^n) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R})$ ist definiert als

$$\mathrm{div}\, F := \sum_{i=1}^n \partial_i F_i =: \nabla \cdot F$$

(div F kann als „Quellstärke" interpretiert werden. Ist $\mathrm{div}\, F = 0$, dann heißt F „quellenfrei" bzw. „divergenzfrei")

- Der „Laplace Operator" $\Delta: C^{k+1}(U,\mathbb{R}) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R})$ ist definiert als

$$\Delta f := \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f =: \nabla^2 f$$

(Ist $f=0$, so heißt $f$ „harmonisch")

- Für $n=3$ ist die „<u>Rotation</u>“ $\mathrm{rot}: C^k(U,\mathbb{R}^3) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R}^3)$ definiert

  über $(\mathrm{rot}\, F)_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j F_k$ also $\mathrm{rot}\, F = \nabla \times F$.

  (Ist $\nabla \times F = 0$, heißt $F$ „rotationsfrei“)

<u>Satz:</u> Ist $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $\phi \in C^2(U,\mathbb{R})$ und $\tilde{F} \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$, dann gilt:

(i) $F = \nabla\phi \Rightarrow \nabla \times F = 0$, d.h. Gradientenfelder sind rotationsfrei,

(ii) $F = \nabla \times \tilde{F} \Rightarrow \nabla \cdot F = 0$, d.h. Rotationsfelder sind divergenzfrei.

<u>Beweis:</u> (i) $(\nabla \times F)_i = (\nabla \times (\nabla\phi))_i = \sum_{jk=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k \phi = 0$ da $\partial_j\partial_k\phi = \partial_k\partial_j\phi$ und $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$.

(ii) $\nabla \cdot F = \nabla \cdot (\nabla \times \tilde{F}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \partial_i \partial_j \tilde{F}_k = 0$ $\square$