MATHEMATIK FÜR PHYSIKER: ANALYSIS II

Schwerpunkt dieses Semesters: Differentialrechnung für Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

–"– nächstes –"– Integralrechnung –"– –"–

Bsp.e aus der Physik:

- Zeitentwicklung im Phasenraum: $n = m \in 2\mathbb{N}$
- Kraftfelder & Geschw.felder: $n = m = 3$
- Potentiale: $n = 3$, $m = 1$
- ...

I. Metrische Räume

I.1. Definition & Grundbegriffe

zur Erinnerung nochmal die Def. des Abstandsbegriffs:

Def.:
- Eine Funktion $d: M \times M \to [0, \infty)$ heißt „Metrik" auf der Menge M, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

  (i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ „Definitheit"

  (ii) $d(x,y) = d(y,x)$ „Symmetrie"

  (iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ „Dreiecksungl."

- Das Paar (M, d) heißt dann „metrischer Raum".

Beispiele:
- Aus einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ wird durch $d(x,y) := \|x - y\|$ ein metrischer Raum (V, d).

  Bsp.: - $V = \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$

  - $V = \mathbb{C}^n$ mit $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, $p \in (1, \infty)$ „L^p-Norm"

    oder $\|x\|_\infty := \sup_i \{|x_i|\}$ „Supremumsnorm"

- $V = C([a,b])$ mit $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$, $p \in (1,\infty)$

  oder $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

- n-bit strings $M = \{0,1\}^n$ mit „Hammingabstand"

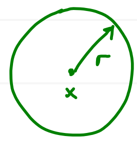
  $d(x,y) := |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$

- n-Sphäre $M = S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ mit $d(x,y)$ gleich der Länge der kürzesten Verbindungsstrecke zweier Punkte auf der Sphäre.

Die Rolle des Intervalls im $\mathbb{R}^1$ spielt in allg. metr. Räumen die „Umgebung":

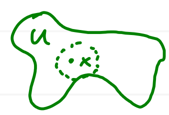
Def.: Sei (M,d) ein metrischer Raum.

- $B_r(x) := \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$ für $x,y \in M$, $r > 0$



- Ist $x \in U \subseteq M$, so heißt U „Umgebung" von x, wenn

  $\exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U$



- $U \subseteq M$ heißt „offen", wenn $\forall x \in U \; \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U$

- $A \subseteq M$ heißt „abgeschlossen", wenn $M \setminus A$ offen ist.

Bem.:
- Viele Mengen, wie z.B. $[0,1)$ in $\mathbb{R}$, sind weder offen noch abgeschlossen.
- es gilt (i) $\emptyset$ und M sind offen,
  (ii) der Durchschnitt zweier offener Mengen ist offen,
  (iii) die Vereinigung bel. vieler offener Mengen ist offen.
- der Durchschnitt ∞-vieler offener Mengen ist nicht notwendigerweise wieder offen, z.B.: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$

Def.:
- Für $Y \subseteq M$ heißt $Y^\circ := \{ x \in Y \mid Y \text{ ist Umgebung von } x \}$ das „Innere" von Y

  (Y° ist damit die größte offene Teilmenge von Y)

- Für $Y \subseteq M$ heißt $\overline{Y} := M \setminus (M \setminus Y)^\circ$ der „Abschluß" von Y.

  ($\overline{Y}$ ist damit die kleinste abgeschlossene Menge in M, die Y enthält)

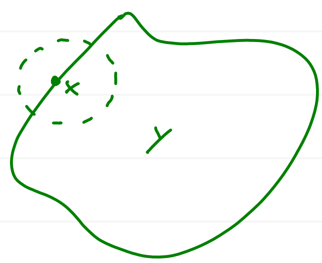
- $D \subseteq M$ heißt „dicht" in M, falls $\overline{D} = M$.

- Der „Rand" ∂Y einer Menge Y ist definiert als $\partial Y := \overline{Y} \setminus Y^\circ$

Bemerkungen:
- Es gilt $Y^\circ \subseteq Y \subseteq \overline{Y} = (Y^\circ \cup \partial Y)$ und $\overline{Y^\circ} = \overline{Y}$
- $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, da $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \underbrace{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ}_{= \emptyset} = \mathbb{R}$
- Der Rand ∂Y ist die Menge aller Punkte für die für bel. $r > 0$ gilt:

  $B_r(x) \cap Y \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap (M \setminus Y) \neq \emptyset$

  (Beweis → Übung)



I.2. Konvergenz

Def.: Sei (M,d) ein metrischer Raum und $a_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt „Konvergent" gegen $a \in M$, wenn

  $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N: \ d(a_n, a) < \varepsilon$$

  In dem Fall schreiben wir „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$" oder „$a_n \to a$".

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt „Cauchy-Folge", wenn

  $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n,m > N: \ d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

Satz: Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Wegen Konvergenz können wir für ein bel. $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $\forall n > N: d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit gilt $\forall n,m > N$:

$$d(a_n, a_m) \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Ungl.}}}{\leq} d(a_n, a) + d(a_m, a) < \varepsilon$$

$\square$

Def.:

- Ein metrischer Raum in dem alle Cauchy-Folgen konvergieren heißt „vollständig".
- Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt „Banachraum"

Bem.:

- aus dem 1. Sem. wissen wir z.B., dass $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig ist, $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ dagegen nicht.
- später zeigen wir, dass jeder endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorraum ein Banachraum ist.