....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

Prof. Dr. M. Wolf

6. August 2013, 15:00 – 16:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **6** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **66 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Metrische Räume** **[10 Punkte]**

Sei M ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, heißt *lokal beschränkt*, wenn es zu jedem $x \in M$ eine ϵ-Umgebung von x gibt, auf der f beschränkt ist.

(a) Sei M kompakt. Zeigen Sie: Ist $f : M \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt, dann ist f beschränkt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass f nicht lokal beschränkt ist, wenn f unbeschränkt ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine lokal beschränkte Funktion an, die nicht beschränkt ist.

2. **Differenzierbarkeit** **[10 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{y} & \text{für } y \neq 0, \\ x & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

(a) Wie lauten die partiellen Ableitungen auf der x-Achse?

$\partial_x f(x,0) =$

$\partial_y f(x,0) =$

(b) Zeigen Sie, dass $\partial_x f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

Sie dürfen im folgenden (ohne Beweis) benutzen, dass auch $\partial_y f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

(c) Ist f differenzierbar?

☐ Ja ☐ Nein

(d) Wie lautet die Richtungsableitung in Richtung $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ im Punkt $(1,0)$?

$\partial_v f(1,0) =$

3. **Taylorentwicklung** **[10 Punkte]**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei dreimal stetig differenzierbar und der Punkt $(x^*, y^*) = (1, 1)$ sei ein stationärer Punkt von f mit $f(x^*, y^*) = 2$. Weiter sei

$$\partial_x^2 f(x^*, y^*) = 0,\ \partial_x \partial_y f(x^*, y^*) = 1,\ \partial_y^2 f(x^*, y^*) = 3.$$

(a) Der Punkt (x^*, y^*) ist ein

☐ lokales Minimum ☐ lokales Maximum ☐ Sattelpunkt

von f.

(b) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung von f im Entwicklungspunkt (x^*, y^*) bis zur zweiten Ordnung?

$f(x, y) =$ $+R_2\big((x, y), (x^*, y^*)\big)$

(c) Sei nun $g(u, v) = f(1 + uv, 1 + u - v)$. Wie lautet die Hessematrix von g im Ursprung?

$H_g(0, 0) =$

4. **Implizite Funktionen** **[12 Punkte]**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y - 3 + e^{y-x}$. Die Gleichung $f(x, y) = 0$ soll nach y aufgelöst werden.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ genau eine Nullstelle besitzt, die mit $\tilde{y}(x)$ bezeichnet werden soll. Hinweis: Monotonie.

(b) Zeigen Sie, dass $\tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Hinweis: Satz über implizite Funktionen.

(c) Bestimmen Sie dasjenige x_0, für das $\tilde{y}\,'(x_0) = 0$ gilt.

5. **Extrema mit Nebenbedingungen** **[14 Punkte]**

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-4)^2$ auf der Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 25\}$ wie folgt:

(a) Wie lauten der Gradient und die Hessematrix von f?

$\operatorname{grad} f(x,y) =$	$H_f(x,y) =$

(b) Besitzt f einen stationären Punkt im Inneren von K?

☐ Ja ☐ Nein

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Kandidaten für Extremwerte von f auf dem Rand ∂K.

(d) In welchen Punkten liegen die globalen Maxima und Minima von $f|_K$?

6. **Variationsrechnung** **[10 Punkte]**

Gegeben ist das Funktional $F(x) = \int_0^2 \left(x(t)^2 + \dot{x}(t)^2\right)dt$ für $x \in C^2([0,2])$ mit den Randbedingungen $x(0) = 1$, $x(2) = 1$.

(a) Wie lautet die Lagrange-Funktion zu diesem Problem?

$L(t, x, v) =$

(b) Geben Sie ein erstes Integral $E(t, x, v)$ für die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals F an.

$E(t, x, v) =$

(c) Wie lautet explizit die Euler-Lagrange-Gleichung für F?

(d) Finden Sie mit Hilfe der allgemeinen Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, $x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, den stationären Punkt $x^*(t)$ von F.

$x^*(t) =$