TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2013
Blatt 12
(8.7.2013)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2013S

Hausaufgaben

12.1. Zwei einfache Variationsprobleme

Bestimmen Sie die stationären Punkte von $F(x) = \int_1^e L(t, x, \dot{x})dt$ für $x \in C^2([1, e])$ mit den Randbedingungen $x(1) = a$, $x(e) = b$, $a, b > 0$, wobei

(a) $L(t, x, v) = tv^2$,

(b) $L(t, x, v) = xv^2$.

12.2. Kürzeste Verbindung auf dem Zylinder

Bestimmen Sie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten $P_1 = (r \cos \phi_1, r \sin \phi_1, z_1)$ und $P_2 = (r \cos \phi_2, r \sin \phi_2, z_2)$ die auf dem Zylindermantel $\{x^2 + y^2 = r^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ verläuft, wobei $r > 0$ konstant ist.

(a) Bestimmen Sie den metrischen Tensor $g(\phi, z) := J_\Phi(\phi, z)^{\mathrm{T}} J_\Phi(\phi, z)$ für die Parametrisierung des Zylindermantels durch $\Phi(\phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$.

(b) Sei $0 < \phi_2 - \phi_1 < \pi$. Berechnen Sie die Länge einer durch ϕ parametrisierten Kurve $\gamma(\phi) = \Phi(\phi, \tilde{z}(\phi))$ mit $\tilde{z} \in C^2([\phi_1, \phi_2], \mathbb{R})$.

(c) Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für das in (b) erhaltene Längenfunktional $F(\tilde{z}) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r^2 + \tilde{z}'(\phi)^2} d\phi$ und interpretieren Sie die so erhaltenen stationären Kurven auf dem Zylinder.

12.3. Die Kettenlinie

Die Kettenlinie, d.h. die Verbindung zweier Punkte durch eine Kette konstanter Länge mit minimaler potentieller Energie im konstanten Schwerefeld, minimiert das Funktional

$$F(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}dt$$

(a) Bestimmen Sie ein erstes Integral der Euler-Lagrange Gleichung für F und finden Sie Lösungen der Form $x(t) = a \cosh(b(t + c))$. Welche Einschränkung ergibt sich an a, b und c?

(b) Wie lautet die Euler-Lagrange-Gleichung für F?

(c) Zeigen Sie, dass die in (a) gefundenen Funktionen die Euler-Lagrange-Gleichung für F lösen.

Abgabe der Hausaufgaben: 15.7.2013, bis 12:00 im Briefkasten oder in der Zentralübung