



## Hausaufgaben

### 8.1. Van-der-Waals-Gleichung

Ein reales Gas wird durch die Zustandsgleichung  $F(p, V, T) = 0$ ,  
 $F(p, V, T) = (p + \frac{a}{V^2})(V - b) - RT$  mit Konstanten  $a, b \geq 0$ ,  $R > 0$  beschrieben.

- Für welche  $p, V, T > 0$  kann man  $F(p, V, T) = 0$  lokal nach  $V$  auflösen?
- Man zeige  $\frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = -1$  und überprüfe dies explizit für  $a = b = 0$  (Ideales Gas).
- Sei nun  $a, b > 0$ . Zeigen Sie, dass sich  $F|_{\mathbb{R}_+ \times (b, \infty) \times \mathbb{R}_+}$  global nach  $p$  auflösen läßt. Skizzieren Sie  $V \mapsto p(V, T)$  für  $a = 27$ ,  $b = 1$ ,  $R = 1$  und  $T = 7, 8, 9$  für  $V \in (b, 8]$ .
- Bestimmen Sie den Punkt  $(p_c, V_c, T_c) \in F^{-1}(\{0\})$ , in dem sowohl  $\partial_V p(V_c, T_c) = 0$ , als auch  $\partial_V^2 p(V_c, T_c) = 0$  ist (kritischer Punkt) ohne die explizite Form von  $p(V, T)$  zu benutzen.

### 8.2. Eine implizit definierte Kurve

Gegeben sind die beiden Gleichungen  $x^2 + y^2 + z^2 = 1 - xy - xz$  und  $2x^2 + y^2 = 6 + x + xz - yz$ . Die Lösungsmenge enthält den Punkt  $P = (x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 1)$ .

- Man versuche, die Lösungsmenge in einer Umgebung von  $P$  explizit durch  $x$  zu parametrisieren (Auflösen nach  $y, z$ ). Gelingt dies nicht, lösen Sie trotzdem Teil (b).
- Berechnen Sie die Tangente an die in (a) gesuchte Lösungskurve durch den Punkt  $P$ .

### 8.3. Störungsrechnung

$V_\alpha(x) = (x^2 - 1)^2 - \alpha x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ist ein Doppelmuldenpotential in einem konstanten elektrischen Feld der Stärke  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- Bestimmen und klassifizieren Sie die lokalen Extrema für  $\alpha = 0$ .
- Wie verändern sich die Positionen der lokalen Extrema von  $V_\alpha$  in Abhängigkeit von  $\alpha$ , entwickelt bis zur zweiten Ordnung um  $\alpha = 0$ ?
- Geben Sie die Werte von  $V_\alpha$  und  $V_\alpha''$  in den Extremalstellen bis zur zweiten Ordnung in  $\alpha$  an.

**Abgabe der Hausaufgaben:** 17.6.2013, bis 12:00 im Briefkasten oder in der Zentralübung