TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2013
Blatt 6
(27.5.2013)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2013S

Hausaufgaben

6.1. Radialsymmetrische harmonische Funktionen

Gesucht sind alle radialsymmetrischen Lösungen der n–dimensionalen Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$, wobei radialsymmetrisch heißt, dass $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = \|y\|$.

(a) Ist $f \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ radialsymmetrisch, so gibt es ein $g \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ mit $f(x) = g(\|x\|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) Welche gewöhnliche Differentialgleichung ergibt sich für g, wenn $\Delta f = 0$ ist?

(c) Finden Sie *alle* Lösungen der Differentialgleichung $g''(r) = \frac{1-n}{r} g'(r)$, $r > 0$, für $n \in \mathbb{N}$.

(d) Parametrisieren Sie die Menge $\{\Delta f = 0 \mid f \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \|x\| = \|y\| \Rightarrow f(x) = f(y)\}$ durch zwei Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ für festes $n \in \mathbb{N}$.

6.2. Besselfunktionen

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt$ die n-te Besselfunktion.

(a) Zeigen Sie, dass J_n eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung ist:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0.$$

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe von J_0 im Ursprung und ihren Konvergenzradius.

BEMERKUNG: Die Besselfunktion J_0 ist gleich ihrer Taylorreihe.

6.3. Ein Zykloidenstück, auf Bogenlänge parametrisiert

Gegeben ist das Zykloidenstück $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = r \begin{pmatrix} t + \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$, $r > 0$.

(a) Veranschaulichen Sie γ in einer Skizze.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ von γ und die Länge $L(\gamma)$.

(c) Parametrisieren Sie γ auf Bogenlänge um.

6.4. Unabhängigkeit der Kurvenlänge von der Parametrisierung

Seien $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\gamma} : [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1] \to \mathbb{R}^n$ zwei Kurven, so dass $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$ für ein $\phi \in C^1([t_0, t_1], [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1])$ mit $\phi(t_0) = \tilde{t}_0$ und $\phi(t_1) = \tilde{t}_1$, so dass $\phi'(t) > 0$ für alle $t \in [t_0, t_1]$.

(a) Zeigen Sie, dass dann $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$ gilt.

(b) Zeigen Sie anhand von $\phi : [0, 3\pi] \to [-1, 1]$, $\phi(t) = -\cos t$, $\tilde{\gamma} : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $\tilde{\gamma}(s) = s$, $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$, dass für (a) die Bedingung $\phi' > 0$ nicht weggelassen werden kann.

Abgabe der Hausaufgaben: 3.6.2013, bis 12:00 im Briefkasten oder in der Zentralübung